

TD 4 : Estimation par intervalle de confiance

Exercice 1. On modélise la masse d'un oeuf choisi au hasard dans un centre avicole par une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où $\mu > 0$ et $\sigma^2 > 0$ sont des paramètres inconnus. On recueille un échantillon expérimental de 18 oeufs que l'on pèse ; les masses, en gramme, sont reportées ci-dessous :

50 54 52 62 79 54 89 55 42 51 41 53 43 53 79 55 34 55

1. Que représentent pour les oeufs les paramètres μ et σ^2 ?
2. Rappeler la démarche permettant de construire un intervalle de confiance pour μ de niveau 95%. Calculer l'intervalle de confiance expérimental de niveau 95% pour la masse moyenne d'un oeuf.
3. Rappeler la démarche permettant de construire un intervalle de confiance pour σ^2 de niveau 95%. Calculer l'intervalle de confiance expérimental de niveau 95% pour la variance de la masse d'un oeuf.

Exercice 2. À partir du jeu de données « Mesures5 » du package R « BioStatR » on souhaite construire un intervalle de confiance pour la taille moyenne du fruit de la bignone.

1. On modélise la taille d'un fruit de bignone choisi aléatoirement par une variable aléatoire de loi d'espérance inconnue $\mu > 0$ et de variance inconnue $\sigma^2 > 0$. Que représentent pour la bignone les paramètres μ et σ^2 ?

La commande R suivante permet de sélectionner les tailles associées à l'espèce « bignone ».

```
library(BioStatR)
x=subset(Mesures5, espece == "bignone", select=taille)
taille_bignone=x$taille
```

2. Rappeler la démarche permettant de construire un intervalle de confiance pour μ de niveau asymptotique 90%. Calculer un intervalle de confiance expérimental de niveau asymptotique 90% pour la taille moyenne du fruit de la bignone

Exercice 3. À partir du jeu de données « Mesures5 » du package R « BioStatR » on souhaite calculer un intervalle de confiance pour la proportion de gousse de glycine blanche ayant au moins trois graines.

1. On considère une variable aléatoire X qui vaut 1 lorsqu'une gousse de glycine blanche, choisi aléatoirement, a au moins trois graines et 0 sinon. Quelle est la loi de X ? Préciser l'interprétation, pour la glycine blanche, de son paramètre inconnu.
2. Rappeler la démarche permettant de construire un intervalle de confiance pour une proportion de niveau asymptotique 95%. Calculer un intervalle de confiance expérimental de niveau asymptotique 95% pour la proportion de gousse de glycine blanche ayant au moins trois graines.

Exercice 4 (La méthode de « capture-marquage et recapture »). On souhaite estimer le nombre de hyènes tachetées d'une réserve. On capture 200 hyènes que l'on équipe d'un collier émetteur et que l'on relâche. Plus tard, lors de visites de la réserve, on compte le nombre de hyènes équipées d'un collier (une hyène peut être comptée plusieurs fois).

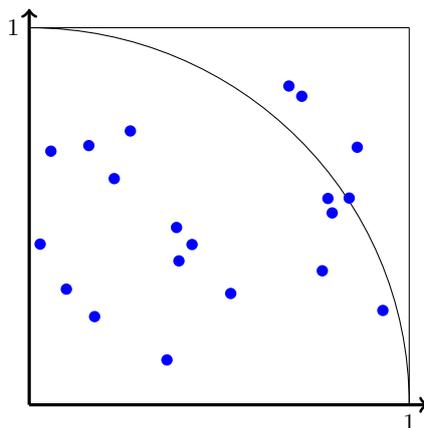
1. On considère une variable aléatoire X qui vaut 1 lorsqu'une hyène, choisie aléatoirement, a un collier et 0 sinon. Quelle est la loi de X ? Préciser l'interprétation du paramètre inconnu.

Parmi 300 hyènes comptées, 80 avaient un collier.

2. Rappeler la démarche permettant de construire un intervalle de confiance pour une proportion de niveau asymptotique 95%. Donner une estimation par intervalle de confiance de niveau 0.95 du nombre total de hyènes dans la réserve.

Lien vers la page wikipédia de cette méthode (la page en langue anglaise est plus détaillée).

Exercice 5 (Ecrits CAPES 2017). On s'intéresse maintenant à une autre méthode (pour calculer l'aire du quart de disque de rayon 1), appelée méthode de Monte-Carlo. Il s'agit de tirer aléatoirement un point du carré unité de façon uniforme et de calculer la fréquence des points qui sont dans le quart de disque D .



On admet que la probabilité qu'un point tiré de cette manière soit dans le quart de disque est égale à A (l'aire du quart de disque de rayon 1).

1. Soit $M(x, y)$ un point du carré $[0, 1]^2$. Montrer que ce point est dans le quart de disque dont on cherche à mesurer l'aire si, et seulement si, $x^2 + y^2 \leq 1$.
2. **Question originale :** On dispose de la fonction (sans argument) `alea`, qui renvoie à chaque appel un nombre réel tiré au hasard uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$. Écrire un algorithme qui simule un tirage aléatoire de N points du carré unité et calcule la fréquence f des points figurant dans le quart de disque D . **Suggestion :** Répondre à cette question en écrivant un algorithme avec `R`. Une fonction utile pour cet algorithme est `runif(n = ...)` qui génère un échantillon expérimental de taille n d'une loi uniforme sur $[0, 1]$.
3. f étant la fréquence obtenue lors d'un tirage aléatoire de N points du carré unité, déterminer un intervalle de confiance de A au niveau de confiance 95%.
4. En déduire le nombre N de tirages à effectuer pour obtenir, au niveau de confiance 95 %, une estimation de A avec une précision égale à 10^{-3} .