Procédures de test et p-valeur

Patrick Tardivel, Université de Bourgogne

Notations :

— La notation $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ représente une loi normale de moyenne $\mu \in \mathbb{R}$ et de variance $\sigma^2 > 0$.

— La notation $\mathcal{B}(n, p)$ représente une loi binomiale dont le nombre d'expériences est $n \geq 1$ et la probabilité de succès est $p \in [0, 1]$.

1 Introduction théorique à la notion de test

Soit X une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, Pr) \to (\mathbb{X}, \mathcal{X})$ et $\mathcal{P}$ une famille de lois de probabilité sur l'espace probabilisable $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$, où $\mathbb{X}$ est l'espace des observations. La variable aléatoire X peut modéliser des situations très différentes (il ne faut pas restreindre X a une variable aléatoire réelle, c'est-à-dire au cas où l'espace des observations est $\mathbb{X} = \mathbb{R}$). On peut avoir $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ et les composantes $X_1, \ldots, X_n$ de X peuvent être dépendantes ou encore être un n-échantillon ($i.e$ $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de même loi). On peut également avoir $X = (Y_1, \ldots, Y_{n_1}, Z_1, \ldots, Z_{n_2})$ où $Y_1, \ldots, Y_{n_1}$ et $Z_1, \ldots, Z_{n_2}$ sont deux échantillons indépendants qui peuvent avoir la même taille ($i.e$ $n_1 = n_2$) ou encore des tailles différentes ($i.e$ $n_1 \neq n_2$).

On suppose que la loi inconnue $\mathbb{P}^X$ de la variable aléatoire X est un élément de $\mathcal{P}$ (on rappelle que $\mathbb{P}^X(A) = Pr(X \in A) = Pr(\{w \in \Omega : X(\omega) \in A\})$. On souhaite tester l'hypothèse nulle $\mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^0$ où $\mathcal{P}^0$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}$. En résumé, un problème de test peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} X : (\Omega, \mathcal{F}, Pr) \to (\mathbb{X}, \mathcal{X}) \\ \mathbb{P}^X \in \mathcal{P}, \text{ où } \mathbb{P}^X \text{ est la loi } X \text{ et } \mathcal{P} \text{ est une famille de lois de probabilité sur } (\mathbb{X}, \mathcal{X}) \\ \mathcal{H}^0 : \mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^0 \text{ où } \mathcal{P}^0 \text{ est un sous-ensemble de } \mathcal{P} \end{cases} .$$

On dira que la famille de lois de probabilité $\mathcal{P}$ est paramétrique lorsque ses éléments sont indexés par un paramètre de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta\}$ où Θ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$.

Test d'ajustement d'une moyenne : On considère $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon gaussien modélisant la différence d'une quantité mesurée deux fois "avant et après". On souhaite savoir si la différence moyenne avant-après est non-nulle [1]. Les ensembles $\mathbb{X}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^0$ du problème de test sont donnés ci-dessous.

— L'espace des observation est $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$.

— La loi de X est un élément de l'ensemble $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)^{\otimes n} : \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}$.

— On teste l'hypothèse nulle : la différence moyenne avant-après est nulle, c'est-à-dire $\mu = 0$, donc $\mathcal{P}^0 = \{\mathcal{N}(0, \sigma^2)^{\otimes n} : \sigma > 0\}$.

Test d'ajustement d'une variance : On considère $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon gaussien. On souhaite savoir si la variance est différente de 1. Les ensembles $\mathbb{X}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^0$ du problème de test sont donnés ci-dessous.

— L'espace des observation est $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$.

1. Historiquement, la formulation "hypothèse nulle" est un raccourci de l'hypothèse : "la différence moyenne avant et après est nulle".

— La loi de X est un élément de l'ensemble $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)^{\otimes n} : \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}$.

— On teste l'hypothèse nulle : la variance vaut 1, c'est-à-dire $\sigma^2 = 1$, donc $\mathcal{P}^0 = \{\mathcal{N}(\mu, 1)^{\otimes n} : \mu \in \mathbb{R}\}$.

Test d'ajustement d'une probabilité : On considère $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de loi Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On souhaite savoir si p est différent de 1/2. Les ensembles $\mathbb{X}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^0$ du problème de test sont donnés ci-dessous.

— L'espace des observation est $\mathbb{X} = \{0, 1\}^n$.

— La loi de X est un élément de l'ensemble $\mathcal{P} = \{\mathcal{B}(p)^{\otimes n} : p \in [0, 1]\}$.

— On teste l'hypothèse nulle : $p = 1/2$ donc $\mathcal{P}^0 = \{\mathcal{B}(1/2)^{\otimes n}\}$.

Test de comparaison de moyennes : On considère $X = (Y_1, \ldots, Y_{n_1}, Z_1, \ldots, Z_{n_2})$ deux échantillons indépendants de variables aléatoires gaussiennes. On souhaite savoir si les moyennes sont différentes. Les ensembles $\mathbb{X}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^0$ du problème de test sont donnés ci-dessous.

— L'espace des observation est $\mathbb{X} = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$.

— La loi de X est un élément de l'ensemble $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)^{\otimes n_1} \otimes \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)^{\otimes n_2} : \mu_1 \in \mathbb{R}, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0\}$.

— On teste l'hypothèse nulle : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ donc $\mathcal{P}^0 = \{\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_1^2)^{\otimes n_1} \otimes \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_2^2)^{\otimes n_1} : \mu_0 \in \mathbb{R}, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0\}$.

Test de comparaison de variances : On considère $X = (Y_1, \ldots, Y_{n_1}, Z_1, \ldots, Z_{n_2})$ deux échantillons indépendants de variables aléatoires gaussiennes. On souhaite savoir si les variances sont différentes. Les ensembles $\mathbb{X}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^0$ du problème de test sont donnés ci-dessous.

— L'espace des observation est $\mathbb{X} = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$.

— La loi de X est un élément de l'ensemble $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)^{\otimes n_1} \otimes \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)^{\otimes n_2} : \mu_1 \in \mathbb{R}, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0\}$.

— On teste l'hypothèse nulle : $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$ donc $\mathcal{P}^0 = \{\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_0^2)^{\otimes n_1} \otimes \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_0^2)^{\otimes n_2} : \mu_1 \in \mathbb{R}, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_0 > 0\}$.

Test de comparaison de probabilités : On considère $X = (Y_1, \ldots, Y_{n_1}, Z_1, \ldots, Z_{n_2})$ deux échantillons indépendants de variables aléatoires de Bernoulli de loi respective $\mathcal{B}(p_1)$ et $\mathcal{B}(p_2)$. On souhaite savoir si p_2 est plus grand que p_1. Les ensembles $\mathbb{X}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^0$ du problème de test sont donnés ci-dessous.

— L'espace des observation est $\mathbb{X} = \{0, 1\}^{n_1+n_2}$.

— La loi de X est un élément de l'ensemble $\mathcal{P} = \{\mathcal{B}(p_1)^{\otimes n_1} \otimes \mathcal{B}(p_2)^{\otimes n_2} : 0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1\}$.

— On teste l'hypothèse nulle : $p_1 = p_2 = p_0$ donc $\mathcal{P}^0 = \{\mathcal{B}(p_0)^{\otimes n_1+n_2} : p_0 \in [0, 1]\}$.

Un ensemble R, appelé région de rejet, est un élément de $\mathcal{X}$ (*i.e.* une région mesurable de $\mathbb{X}$) ; le risque de première espèce de la procédure rejetant l'hypothèse nulle $\mathcal{H}^0$ lorsque $X \in R$ est la fonction :

$$\mathbb{P} \in \mathcal{P}^0 \mapsto \mathbb{P}(R).$$

Le risque de première espèce maximal vaut $\sup\{\mathbb{P}(R) : \mathbb{P} \in \mathcal{P}^0\}$. Par ailleurs, on dit que la procédure a un risque de première espèce de niveau $\alpha \in [0, 1]$ lorsque $\sup\{\mathbb{P}(R) : \mathbb{P} \in \mathcal{P}^0\} \leq \alpha$. Ainsi, sous l'hypothèse nulle quand $\mathbb{P}^X$ est réellement un élément de $\mathcal{P}^0$, on a $Pr(X \in R) = \mathbb{P}^X(R) \leq \alpha$. On peut remarquer que la construction d'une procédure de test contrôlant le risque de première espèce au niveau α nécessite uniquement de connaître $\mathcal{P}^0$; il n'est pas utile, pour construire une telle procédure, de préciser l'ensemble $\mathcal{P}$. Néanmoins, l'ensemble $\mathcal{P}$ joue un rôle important pour la notion de puissance qui est la fonction ci-dessous :

$$\mathbb{P} \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^0 \mapsto \mathbb{P}(R).$$

L'hypothèse alternative est $\mathcal{H}^1 : \mathbb{P}^X \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^0$. Sous cette hypothèse, on souhaite rejeter l'hypothèse nulle avec une grande probabilité. En conclusion, l'objectif principal d'une procédure de test est de construire une région de rejet contrôlant le risque de première espèce au niveau $\alpha \in [0,1]$ (usuellement $\alpha = 0,05$) et pour laquelle la fonction puissance est la plus large possible.

1.1 Introduction théorique à la notion de p-valeur

La plupart des procédures de test sont basées sur des p-valeurs ; ce concept important est décrit formellement à la Proposition 1.

Proposition 1 (p-valeur)**.** *On considère le problème de test suivant*

$$\begin{cases} X : (\Omega, \mathcal{F}, Pr) \to (\mathbb{X}, \mathcal{X}) \\ \mathbb{P}^X \in \mathcal{P}, \text{ où } \mathbb{P}^X \text{ est la loi } X \text{ et } \mathcal{P} \text{ est une famille de lois de probabilité sur } (\mathbb{X}, \mathcal{X}) \\ \mathcal{H}^0 : \mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^0 \text{ où } \mathcal{P}^0 \text{ est un sous-ensemble de } \mathcal{P} \end{cases}.$$

Soit $(R_\alpha)_{\alpha \in]0,1]}$ *une famille emboîtée de régions de rejet telle que* $R_1 = \mathbb{X}$*,* $R_\alpha \subset R_{\alpha'}$ *lorsque* $\alpha \leq \alpha'$ *et contrôlant le risque de première espèce au niveau* α*, c'est-à-dire que*

$$\forall \alpha \in]0,1] \ \sup\{\mathbb{P}(R_\alpha) : \mathbb{P} \in \mathcal{P}^0\} \leq \alpha.$$

On pose $p(X) = \inf\{\alpha \in]0,1] : X \in R_\alpha\}$ *alors, sous l'hypothèse nulle, la variable aléatoire* $p(X)$ *à valeur dans* $[0,1]$ *satisfait*

$$\forall u \in [0,1] \ Pr(p(X) \leq u) \leq u.$$

Démonstration. Parce que les régions de rejet sont emboîtées, l'ensemble $\{\alpha \in]0,1] : X \in R_\alpha\}$ est un intervalle (non vide car contenant 1). De plus, par définition, $p(X)$ est la borne inférieure de cet intervalle. Soit $u \in]0,1[$. L'événement $p(X) \leq u$ implique que $X \in R_\alpha$ pour tout $\alpha > u$. Sous l'hypothèse nulle, lorsque $\mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^0$, on en déduit les inégalités suivantes

$$\forall \alpha > u \ Pr(p(X) \leq u) \leq Pr(X \in R_\alpha) = \mathbb{P}^X(R_\alpha) \leq \sup\{\mathbb{P}(R_\alpha), \mathbb{P} \in \mathcal{P}^0\} \leq \alpha.$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $\alpha > u$, on en déduit que $Pr(p(X) \leq u) \leq u$. Enfin, pour $u = 1$ on a clairement $Pr(p(X) \leq 1) \leq 1$ et pour $u = 0$ un passage à la limite dans l'inégalité précédente montre que $Pr(p(X) \leq 0) \leq 0$. □

La variable aléatoire $p(X)$ à valeur dans $[0,1]$ est appelé p-valeur ; l'inégalité $Pr(p(X) \leq u) \leq u$ signifie que sous l'hypothèse nulle $p(X)$ est stochastiquement plus large qu'une loi uniforme sur $[0,1]$.

1.2 Exemples de calcul de p-valeur pour des procédures classiques

Nous allons déterminer, en exercice, les p-valeurs des tests d'ajustements d'une moyenne, d'une variance et d'une probabilité.

Exercice 1 (Test d'ajustement d'une moyenne)**.** *Soit* $\mu_0 \in \mathbb{R}$*. Pour un échantillon de taille* $n \geq 2$*, on considère le problème de test (bilatéral) suivant*

$$\begin{cases} X : (\Omega, \mathcal{F}, Pr) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \\ \mathbb{P}^X \in \mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)^{\otimes n}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0\} \\ \mathcal{H}^0 : \mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^0 = \{\mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)^{\otimes n}, \sigma > 0\} \end{cases}.$$

Plus simplement on teste $\mathcal{H}^0 : \mu = \mu_0$ contre $\mathcal{H}^1 : \mu \neq \mu_0$. On pose $T(X)$ la statistique

$$T(X) = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{S^2_{corr}/n}} \text{ où } \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \text{ et } S^2_{corr} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2.$$

On rappelle que, sous $\mathcal{H}^0$, lorsque $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un n-échantillon de loi $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)$, la statistique $T(X)$ suit une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

1. *Pour un risque de première espèce de niveau $\alpha \in]0,1[$, on rejette $\mathcal{H}^0$ lorsque $|T(X)| > F_0^{-1}(1-\alpha/2)$ où F_0 est la fonction de répartition d'une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté. Déterminer la p-valeur de cette procédure de test et donner sa loi sous $\mathcal{H}^0$.*
2. *Réécrire formellement le problème de test lorsque l'hypothèse alternative est unilatéral : $\mathcal{H}^1 : \mu > \mu_0$. Donner la p-valeur de cette procédure.*

Solution : 1. Le région de rejet est $R_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : |T(x)| > F_0^{-1}(1-\alpha/2)\}$. Ainsi, la p-valeur vaut

$$\begin{aligned} p(X) &= \inf\{\alpha \in]0,1[: |T(X)| > F_0^{-1}(1-\alpha/2)\}, \\ &= \inf\{\alpha \in]0,1[: F(|T(X)|) > 1-\alpha/2\}, \\ &= \inf\{\alpha \in]0,1[: \alpha > 2(1-F(|T(X)|)\} = 2(1-F(|T(X)|)). \end{aligned}$$

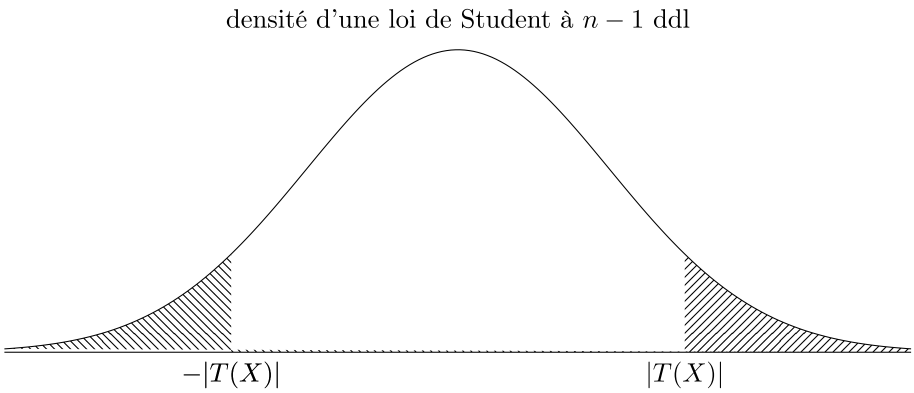

FIGURE 1 – L'aire hachurée de cette figure illustre graphiquement la p-valeur $p(X) = 2(1 - F(|T(X)|))$.

Montrons que sous $\mathcal{H}^0$, la statistique $p(X)$ suis une loi uniforme $\mathcal{U}(0,1)$. Soit $u \in]0,1[$ alors

$$\begin{aligned} Pr(p(X) \leq u) &= Pr(2(1-F(|T(X)|)) \leq u) \\ &= Pr(|T(X)| > F_0^{-1}(1-u/2)) \\ &= Pr(T(X) > F_0^{-1}(1-u/2)) + Pr(T(X) < -F_0^{-1}(1-u/2)) \end{aligned}$$

Enfin, comme sous l'hypothèse nulle, lorsque $\mu = \mu_0$, la statistique $T(X)$ suit une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté de liberté on en déduit que $Pr(p(X) \leq u) = u$.

2. Formellement le problème de test se formule de la façon suivante

$$\begin{cases} X : (\Omega, \mathcal{F}, Pr) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \\ \mathbb{P}^X \in \mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)^{\otimes n}, \mu \geq \mu_0, \sigma > 0\} \\ \mathcal{H}^0 : \mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^0 = \{\mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)^{\otimes n}, \sigma > 0\} \end{cases}.$$

Avec un risque de première espèce au niveau $\alpha \in]0,1[$, on rejette $\mathcal{H}^0$ lorsque $T(X) > F_0^{-1}(1-\alpha)$ (*i.e.* la région de rejet est $R_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : T(x) > F_0^{-1}(1-\alpha)\}$. Ainsi, la p-valeur vaut

$$\begin{aligned} p(X) &= \inf\{\alpha \in]0,1[: T(X) > F_0^{-1}(1-\alpha)\}, \\ &= \inf\{\alpha \in]0,1[: F_0(T(X)) > 1-\alpha\}, \\ &= \inf\{\alpha \in]0,1[: \alpha > 1 - F_0(T(X))\} = 1 - F_0(T(X)). \end{aligned}$$

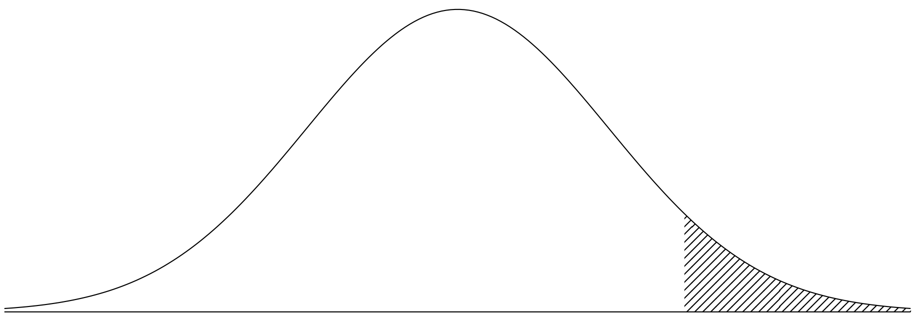

FIGURE 2 – L'aire hachurée de cette figure illustre graphiquement la p-valeur $p(X) = 1 - F_0(T(X))$.

Exercice 2 (Test d'ajustement d'une variance). *Soit $\sigma_0 > 0$. Pour un échantillon de taille $n \geq 2$, on considère le problème de test (bilatéral) suivant*

$$\begin{cases} X : (\Omega, \mathcal{F}, Pr) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \\ \mathbb{P}^X \in \mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)^{\otimes n}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0\} \\ \mathcal{H}^0 : \mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^0 = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)^{\otimes n}, \mu \in \mathbb{R}\} \end{cases}.$$

Plus simplement on teste $\mathcal{H}^0 : \sigma = \sigma_0$ contre $\mathcal{H}^1 : \sigma \neq \sigma_0$. On pose $Y(X)$ la statistique

$$Y(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2} \text{ où } \overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

On rappelle que, sous $\mathcal{H}^0$, lorsque $X = (X_1, \ldots, X_n)$ est un n-échantillon de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$, la statistique $Y(X)$ suit une loi de khi-deux à $n-1$ degrés de liberté.

1. *Pour un risque de première espèce de niveau $\alpha \in]0,1[$, on rejette $\mathcal{H}^0$ lorsque $Y(X) > F_0^{-1}(1-\alpha/2)$ ou lorsque $Y(X) < F_0^{-1}(\alpha/2)$ où F_0 est la fonction de répartition d'une loi de khi-deux à $n-1$ degrés de liberté. Déterminer la p-valeur de cette procédure de test et donner sa loi sous $\mathcal{H}^0$.*
2. *Réécrire formellement le problème de test lorsque l'hypothèse alternative est unilatéral : $\mathcal{H}^1 : \sigma > \sigma_0$.*

Donner la p-valeur de cette procédure.

Solution : 1. Le région de rejet est $R_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : Y(x) > F_0^{-1}(1-\alpha/2)\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : Y(x) < F_0^{-1}(\alpha/2)\}$. Ainsi, la p-valeur vaut

$$\begin{aligned} p(X) &= \inf\left\{\alpha \in]0,1[: \{Y(x) > F_0^{-1}(1-\alpha/2)\} \cup \{Y(x) < F_0^{-1}(\alpha/2)\}\right\}, \\ &= \inf\{\alpha \in]0,1[: \{F_0(Y(X)) > 1-\alpha/2\} \cup \{F_0(Y(X)) < \alpha/2\}\}, \\ &= \inf\{\alpha \in]0,1[: \{\alpha > 2(1-F_0(Y(X))\} \cup \{\alpha > 2F_0(Y(X))\}\}, \\ &= 2\min\{F_0(Y(X)), 1-F_0(Y(X))\}. \end{aligned}$$

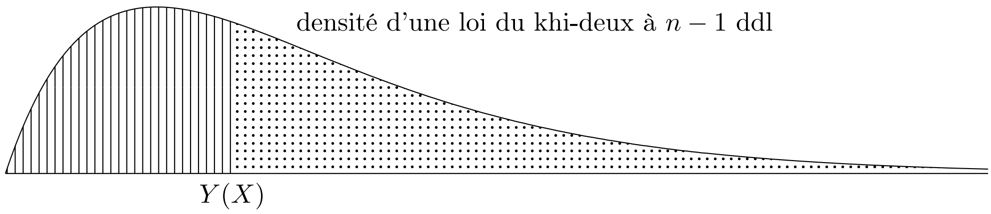

FIGURE 3 – Graphiquement, la p-valeur $p(X) = 2\min\{F_0(Y(X)), 1-F_0(Y(X))\}$ est égale au double de l'aire hachurée la plus petite.

Montrons que sous $\mathcal{H}^0$, la statistique $p(X)$ suis une loi uniforme $\mathcal{U}(0,1)$. Soit $u \in]0,1[$ alors

$$\begin{aligned} Pr(p(X) \leq u) &= Pr(2\min\{F_0(Y(X)), 1-F_0(Y(X))\} \leq u) \\ &= Pr(2F_0(Y(X)) \leq u \cup 2(1-F_0(Y(X))) \leq u)) \\ &= Pr(Y(X) \leq F_0^{-1}(u/2) \cup F_0(Y(X)) \geq F_0^{-1}(1-u/2)) \end{aligned}$$

Comme F_0^{-1} est strictement croissante sur $]0,1[$ on a $F_0^{-1}(u/2) < F_0^{-1}(1-u/2)$ et comme sous l'hypothèse nulle, lorsque $\sigma = \sigma_0$, la statistique $Y(X)$ suit une loi de khi-deux à $n-1$ degrés de liberté on en déduit l'égalité suivante :

$$\underbrace{Pr(Y(X) \leq F_0^{-1}(u/2))}_{=u/2} + \underbrace{Pr(Y(X) \geq F_0^{-1}(1-u/2))}_{=u/2} = u.$$

2. Formellement le problème de test se formule de la façon suivante

$$\begin{cases} X : (\Omega, \mathcal{F}, Pr) \to (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R})) \\ \mathbb{P}^X \in \mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)^{\otimes n}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma \geq \sigma_0\} \\ \mathcal{H}^0 : \mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^0 = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)^{\otimes n}, \mu \in \mathbb{R}\} \end{cases}.$$

Avec un risque de première espèce au niveau $\alpha \in]0,1[$, on rejette $\mathcal{H}^0$ lorsque $Y(X) > F_0^{-1}(1-\alpha)$ (*i.e.* la région de rejet est $R_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : Y(x) > F_0^{-1}(1-\alpha)\}$. Ainsi, la p-valeur vaut

$$\begin{aligned} p(X) &= \inf\{\alpha \in]0,1[: Y(X) > F_0^{-1}(1-\alpha)\}, \\ &= \inf\{\alpha \in]0,1[: F_0(Y(X)) > 1-\alpha\}, \\ &= \inf\{\alpha \in]0,1[: \alpha > 1-F_0(Y(X))\} = 1-F_0(Y(X)). \end{aligned}$$

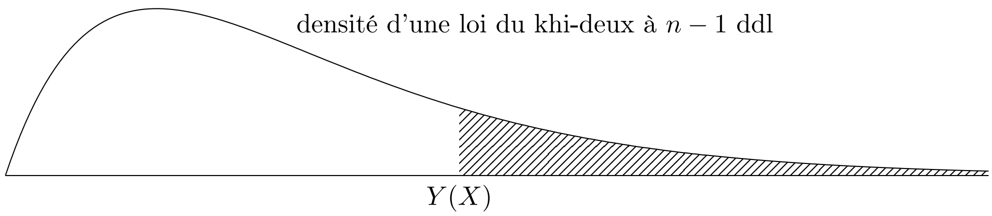

FIGURE 4 – L'aire hachurée de cette figure représente la p-valeur $p(X) = 1 - F_0(Y(X))$.

La notion d'inverse généralisé, définie juste après, est pratique pour construire une région de rejet lorsque la statistique de test suit une loi discrète.

Définition 1 (Inverse généralisé)**.** *Soit $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction croissante, continue à droite vérifiant $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$ et $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ (caractérisation d'une fonction de répartition). L'inverse généralisé $F^{(-1)} :]0,1[\to \mathbb{R}$ de F est définie par*

$$\forall \eta \in]0,1[\quad F^{(-1)}(\eta) = \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq \eta\}.$$

Lorsque F est inversible, l'inverse généralisé correspond à la bijection réciproque de F. Par ailleurs, l'inverse généralisé existe toujours même lorsque F n'est pas inversible ; on peut également remarquer l'inégalité suivante :

Proposition 2. *Soit $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction croissante, continue à droite vérifiant $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$ et $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ alors*

$$\forall \eta \in]0,1[\quad F(F^{(-1)}(\eta)) \geq \eta.$$

Démonstration. Comme $\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq \eta\}$ est un intervalle non majoré dont la borne inférieure est $F^{(-1)}(\eta)$ on en déduit l'inégalité suivante :

$$\forall t > F^{(-1)}(\eta) \quad F(t) \geq \eta.$$

Ainsi, la limite à droite de F en $F^{(-1)}(\eta)$ (qui vaut $\inf\{F(t) : t > F^{(-1)}(\eta)\}$) vérifie

$$\lim_{\substack{t \to F^{(-1)}(\eta) \\ t > F^{(-1)}(\eta)}} F(t) \geq \eta.$$

Par ailleurs, F étant continue à droite, par passage à la limite à droite on obtient

$$\lim_{\substack{t \to F^{(-1)}(\eta) \\ t > F^{(-1)}(\eta)}} F(t) = F(F^{(-1)}(\eta)).$$

Ainsi $F(F^{(-1)}(\eta)) \geq \eta$. □

Exemple 1. *Soit F la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{B}(2, 1/2)$ alors*

$$F(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \frac{1}{4} \text{ si } 0 \leq t < 1 \\ \frac{3}{4} \text{ si } 1 \leq t < 2 \\ 1 \text{ si } 2 \leq t \end{cases}.$$

Pour une valeur quelconque de $\eta \in]0,1[$, l'inverse généralisé $F^{(-1)}(\eta)$ est illustré ci-dessous.

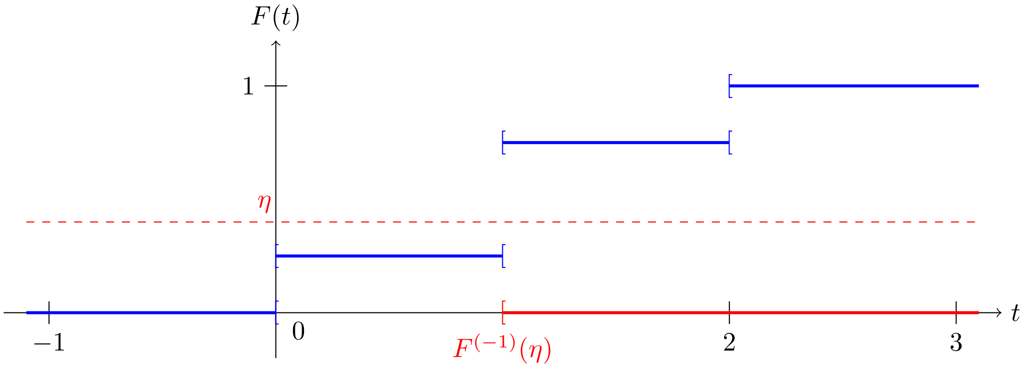

Figure 5 – L'intervalle rouge est l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq \eta\}$; la borne inférieure de cet intervalle est l'inverse généralisé de η : $F^{(-1)}(\eta)$.

Plus généralement, l'inverse généralisé de F est la fonction suivante. On vérifie également que pour tout $\eta \in]0,1[$ on a $F(F^{(-1)}(\eta)) \leq \eta$.

$$F^{(-1)}(\eta) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 < \eta \leq \frac{1}{4} \\ 1 \text{ si } \frac{1}{4} < \eta \leq \frac{3}{4} \\ 2 \text{ si } \frac{3}{4} < \eta < 1 \end{cases} \quad \text{ainsi } F(F^{-1}(\eta)) = \begin{cases} \frac{1}{4} \text{ si } 0 < \eta \leq \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \text{ si } \frac{1}{4} < \eta \leq \frac{3}{4} \\ 1 \text{ si } \frac{3}{4} < \eta < 1 \end{cases}.$$

Exercice 3 (Test d'ajustement d'une probabilité)**.** *Soit $p_0 \in]0,1[$, on considère le problème de test suivant :*

$$\begin{cases} X : (\Omega, \mathcal{F}, Pr) \to (\{0,1,\dots,n\}, \mathcal{P}(\{0,1,\dots,n\}) \\ \mathbb{P}^X \in \mathcal{P} = \{\mathcal{B}(n,p), p \in [p_0, 1]\} \\ \mathcal{H}^0 : \mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^0 = \{\mathcal{B}(n,p_0)\} \end{cases}.$$

En terme plus simple on veut tester l'hypothèse nulle $\mathcal{H}^0 : p = p_0$ contre l'hypothèse alternative $\mathcal{H}^1 : p > p_0$.

1. *Pour un risque de première espèce de niveau $\alpha \in]0,1[$, on rejette $\mathcal{H}^0$ lorsque $X > F_0^{(-1)}(1-\alpha)$ où F_0 est la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{B}(n,p_0)$. Déterminer la p-valeur de cette procédure.*
2. *Est-ce que la p-valeur suit une loi uniforme $\mathcal{U}(0,1)$ sous l'hypothèse nulle ?*

Solution : 1. Comme X est à valeur dans $\{0,1,\dots,n\}$ et que $F_0^{(-1)}(1-\alpha)$ est un entier, de façon équivalente on rejette l'hypothèse nulle lorsque $X \geq F_0^{-1}(1-\alpha)+1$. Ainsi, la p-valeur est la borne inférieure suivante :

$$\begin{aligned} p(X) &= \inf\{\alpha \in]0,1[: X > F_0^{(-1)}(1-\alpha)\}, \\ &= \inf\{\alpha \in]0,1[: X \geq F_0^{(-1)}(1-\alpha)+1\}. \end{aligned}$$

Montrons que $p(X) = 1 - F_0(X-1)$. Soit $\alpha \in]0,1[$ tel que $X \geq F_0^{(-1)}(1-\alpha)+1$. Alors,

$$F_0(X-1) \geq F_0(F_0^{-1}(1-\alpha)) \geq 1-\alpha.$$

Par conséquent, $\alpha \geq 1 - F_0(X-1)$. Cette inégalité étant vraie pour tout élément de l'ensemble $\{\alpha \in]0,1[: X > F_0^{(-1)}(1-\alpha)\}$; la borne inférieure satisfait également $p(X) \geq 1 - F_0(X-1)$. Réciproquement, soit $\alpha \in]0,1[$ tel que $\alpha > 1 - F_0(X-1)$ alors, $F_0(X-1) > 1-\alpha$ donc, par définition de l'inverse généralisé, $X - 1 \geq F_0^{(-1)}(1-\alpha)$ d'où $X > F_0^{(-1)}(1-\alpha)$. Donc α est un élément de l'ensemble $\{\alpha \in]0,1[: X > F_0^{(-1)}(1-\alpha)\}$. Par conséquent la borne inférieure $p(X)$ de cette ensemble vérifie $p(X) \leq 1 - F_0(X-1)$.

2. La p-valeur ne suit pas une une loi uniforme $\mathcal{U}(0,1)$ sous l'hypothèse nulle. En effet, la p-valeur est une

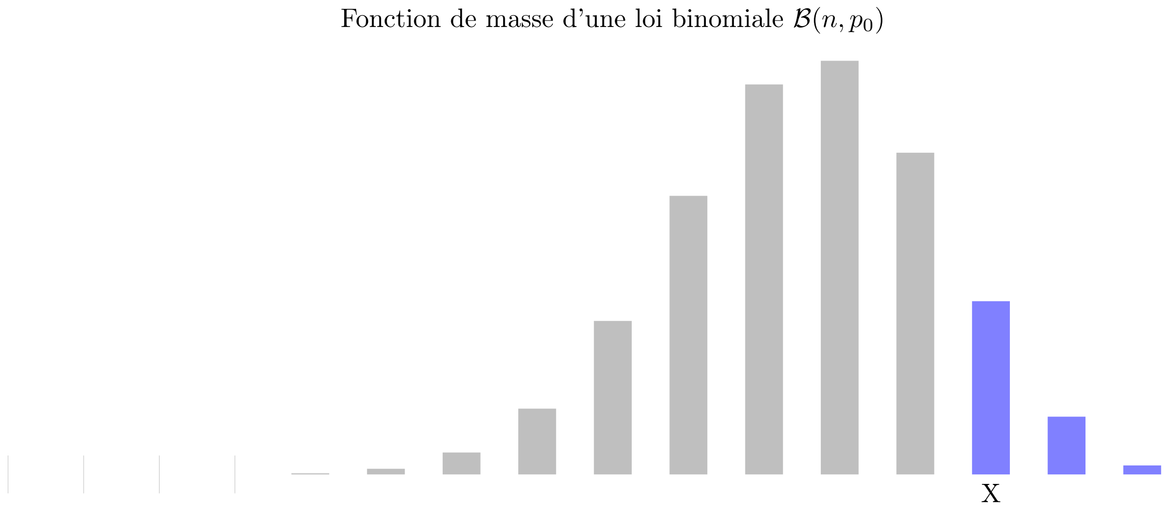

FIGURE 6 – La somme des hauteurs des bâtons bleus représente la p-valeur $1 - F_0(X-1)$.

variable discrète à valeur dans l'ensemble $\{1, 1 - F_0(0), 1 - F_0(1), \ldots, 1 - F_0(n)\}$.