Formulaire de Statistique Inférentielle

Table des matières

1 Droite des moindres carrés et coefficient corrélation linéaire **3**

2 Rudiments de probabilité : indépendance, espérance et variance **3**
2.1 Indépendance . . . 3
2.2 Espérance . . . 3
2.3 Variance . . . 3

3 Lois usuelles **4**
3.1 Lois discrètes . . . 4
3.2 Lois continues . . . 4

4 Intervalles de confiance **5**
4.1 Estimateurs usuels . . . 5
4.2 Intervalle de confiance pour la moyenne et la variance dans le cas gaussien . . . 5
4.3 Intervalle de confiance asymptotique pour une proportion . . . 5
4.4 Intervalle de confiance asymptotique pour la moyenne . . . 5

5 Tests d'hypothèses **5**
5.1 Ajustement d'une moyenne . . . 5
5.2 Ajustement d'une variance . . . 5
5.3 Comparaison de deux proportions . . . 6
5.4 Comparaison de deux variances . . . 6
5.5 Comparaison de deux moyennes . . . 6
5.6 Test du khi-deux d'ajustement à une loi . . . 6
5.7 Test du khi-deux d'indépendance . . . 6

6 Table de la loi normale centrée réduite **7**

7 Valeurs critiques au niveau 5% : loi de Student **8**

8 Valeurs critiques au niveau 5% : loi du khi-deux **9**

9 Valeurs critiques au niveau 5% : loi de Fisher-Snedecor **10**

1 Droite des moindres carrés et coefficient corrélation linéaire

Soit $(X,Y) = \{((X_1,y_1),p_1),\dots,((x_n,y_n),p_n)\}$ une série statistique double pondérée. La droite des moindres carrés pondérés $y = a^*x + b^*$ a pour coefficients

$$a^* = \frac{cov(X,Y)}{v(X)} \text{ et } b^* = \overline{Y} - a^*\overline{X}.$$

Le coefficient de corrélation linéaire vaut

$$r(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{v(X)}\sqrt{v(Y)}}.$$

2 Rudiments de probabilité : indépendance, espérance et variance

Pour ce cours d'introduction à la statistique, nous n'utiliserons que des variables aléatoires discrètes ou continues. Néanmoins cette dichotomie est arbitraire ; certaines variables aléatoires ne sont ni discrète ni continue (voir le cours de probabilité).

2.1 Indépendance

Définition 1. *Des variables aléatoires réelles $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes si :*

$$\mathbb{P}(X \leq a_1 \dots, X_n \leq a_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq a_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n \leq a_n) \quad \textit{pour tout } (a_1 \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2.2 Espérance

Définition 2. *Soir X une variable aléatoire réelle.*

— *Si X est discrète à valeurs dans l'ensemble fini ou dénombrable D alors l'espérance, si elle existe, est donnée par la série :*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in D} xP(X = x).$$

— *Si X est continue de densité f alors l'espérance, si elle existe, est donnée par l'intégrale :*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Proposition 1. *Soit X, Y deux variables aléatoires réelles d'espérance $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$. L'espérance est linéaire ; pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\mathbb{E}(\alpha X + \alpha Y) = \alpha\mathbb{E}(X) + \beta\mathbb{E}(Y).$$

2.3 Variance

Définition 3. *Soir X une variable aléatoire réelle. La variance de la variable aléatoire réelle X est, si elle existe, est donnée par :*

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right).$$

Proposition 2. *Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance $\mathbb{E}(X)$ et de variance* $\mathrm{var}(X)$.

— *Si X est discrète à valeurs dans l'ensemble fini ou dénombrable D alors la variance est donnée par :*

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{x \in D} x^2 P(X = x) - \mathbb{E}(X)^2.$$

— *Si X est continue de densité f alors la variance est donnée par :*

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \mathbb{E}(X)^2.$$

— *La variable aléatoire $Y = (X - \mathbb{E}(X))/\sqrt{\mathrm{var}(X)}$ est centrée et réduite : $\mathbb{E}(Y) = 0$ et $\mathrm{var}(Y) = 1$.*

Proposition 3. *Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes alors* $\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$.

3 Lois usuelles

3.1 Lois discrètes

Définition 4 (Loi de Bernoulli)**.** *Une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\{0,1\}$ suit une loi de Bernoulli. Cette loi est notée $\mathcal{B}(p)$, où $p \in [0,1]$ est le paramètre tel que*

$$P(X=1)=p,\ P(X=0)=1-p.$$

L'espérance et la variance d'une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ valent

$$\mathbb{E}(X)=p \text{ et } \mathrm{var}(X)=p(1-p).$$

Définition 5 (Loi binomiale)**.** *On dit qu'une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\{0,\dots,n\}$ suit une loi binomiale de paramètres (n,p), notée $\mathcal{B}(n,p)$, si pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$ on a*

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

L'espérance et la variance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ valent

$$\mathbb{E}(X)=np \text{ et } \mathrm{var}(X)=np(1-p).$$

Définition 6 (Loi de Poisson)**.** *On dit qu'une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si pour tout $k\in\mathbb{N}$ on a*

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

L'espérance et la variance d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ valent

$$\mathbb{E}(X)=\lambda \text{ et } \mathrm{var}(X)=\lambda.$$

3.2 Lois continues

Définition 7 (Loi uniforme)**.** *Soit $a<b$ sont deux réels. On dit que X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$, notée $\mathcal{U}(a,b)$, si la loi de X a pour densité :*

$$f_X(t)=\frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(t).$$

L'espérance et la variance d'une loi uniforme $\mathcal{U}(a,b)$ valent

$$\mathbb{E}(X)=(b-a)/2 \text{ et } \mathrm{var}(X)=(b-a)^2/12.$$

Définition 8 (Loi exponentielle)**.** *On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$, notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si la loi de X a pour densité :*

$$f_X(t)=\lambda e^{-\lambda t}\mathbf{1}_{[0.+\infty[}(t).$$

L'espérance et la variance d'une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ valent

$$\mathbb{E}(X)=\frac{1}{\lambda} \text{ et } \mathrm{var}(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Définition 9 (Loi normale)**.** *Soit $\mu\in\mathbb{R}$ et $\sigma^2>0$. On dit que X suit une loi normale de paramètres (μ,σ^2), notée $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, si la loi de X a pour densité :*

$$f_X(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

L'espérance et la variance d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ valent

$$\mathbb{E}(X)=\mu \text{ et } \mathrm{var}(X)=\sigma^2.$$

4 Intervalles de confiance

4.1 Estimateurs usuels

Soit $X_1, \dots, X_n$ un n-échantillon d'une loi d'espérance μ et de variance σ^2.

La moyenne empirique : $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$

La variance empirique : $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$

La variance empirique corrigée : $S^2_{\text{corr}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$

4.2 Intervalle de confiance pour la moyenne et la variance dans le cas gaussien

Le Théorème 1 est très utile pour construire un intervalle de confiance pour la moyenne et la variance dans le cadre d'un échantillon gaussien.

Théorème 1. *Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon d'une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 alors :*

1. *La statistique* $\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} = \dfrac{nS^2}{\sigma^2} = \dfrac{(n-1)S^2_{corr}}{\sigma^2}$ *suit une loi $\chi^2(n-1)$.*
2. *La statistique* $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{S^2_{corr}/n}}$ *suit une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.*

4.3 Intervalle de confiance asymptotique pour une proportion

Le Théorème 2 est très utile pour construire un intervalle de confiance asymptotique pour une proportion.

Théorème 2. *Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un $n-$échantillon de loi $\mathcal{B}(p)$ alors :*

$$\frac{\overline{X} - p}{\sqrt{\overline{X}(1 - \overline{X})/n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

4.4 Intervalle de confiance asymptotique pour la moyenne

Le Théorème 3 est très utile pour construire un intervalle de confiance asymptotique pour une moyenne.

Théorème 3. *Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un $n-$échantillon d'une loi d'espérance μ et de variance σ^2 alors :*

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{S^2_{corr}/n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

5 Tests d'hypothèses

5.1 Ajustement d'une moyenne

Hypothèse de normalité : Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Sous l'hypothèse nulle lorsque $\mu = \mu_0$, la statistique

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{S^2_{corr}/n}}$$

suit une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

Sans hypothèse de normalité et n grand : Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de loi de moyenne $\mu \in \mathbb{R}$ inconnue et de variance σ^2 inconnue. Sous l'hypothèse nulle lorsque $\mu = \mu_0$, on a la convergence en loi suivante :

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{S^2_{corr}/n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

5.2 Ajustement d'une variance

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon d'une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2. Sous l'hypothèse nulle lorsque $\sigma^2 = \sigma_0^2$ la statistique

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2}$$

suit une loi $\chi^2(n-1)$.

5.3 Comparaison de deux proportions

Soit S_1 une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n_1, p_1)$ et S_2 une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n_2, p_2)$. Sous l'hypothèse nulle, lorsque $p_1 = p_2$, on a la convergence en loi suivante :

$$Z = \frac{S_1/n_1 - S_2/n_2}{\sqrt{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)(1/n_1 + 1/n_2)}} \xrightarrow[\min\{n_1,n_2\}\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \text{ où } \hat{p}_0 = \frac{S_1 + S_2}{n_1 + n_2}.$$

5.4 Comparaison de deux variances

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ indépendant de $(Y_1, \ldots, Y_n)$ un n-échantillon de loi $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Sous l'hypothèse nulle lorsque $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, la statistique

$$F = \frac{S^2_{corr}(X)}{S^2_{corr}(Y)}.$$

suit une loi de Fisher à $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ degrés de liberté.

5.5 Comparaison de deux moyennes

Hypothèse de normalité et égalité des variances : Soit $(X_1, \ldots, X_{n_1})$ un n_1-échantillon de loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ indépendant de $(Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ un n_2-échantillon de loi $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$. Sous l'hypothèse nulle lorsque $\mu_1 = \mu_2$, la statistique

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

suit une loi de Student à $n_1 + n_2 - 2$ degrés de liberté.

Sans hypothèse de normalité, grands échantillons : Soit $(X_1, \ldots, X_{n_1})$ un n_1-échantillon d'une loi de moyenne $\mu_1 \in \mathbb{R}$ et de variance σ_1^2 indépendant de $(Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ un n_2-échantillon d'une loi de moyenne $\mu_2 \in \mathbb{R}$ et de variance σ_2^2. Sous l'hypothèse nulle lorsque $\mu_1 = \mu_2$, on a la convergence en loi suivante :

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{S^2_{corr}(X)/n_1 + S^2_{corr}(Y)/n_2}} \xrightarrow[\min\{n_1.n_2\}\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

5.6 Test du khi-deux d'ajustement à une loi

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon à valeur dans un ensemble fini E de loi P inconnue et P^0 une loi de probabilité sur E. Sous l'hypothèse nulle, lorsque $P = P^0$, on a la convergence en loi suivante :

$$D = n \sum_{i \in E} \frac{(\widehat{P}_i - P^0(i))^2}{P^0(i)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi(\text{card}(E) - 1 \text{ ddl})$$

5.7 Test du khi-deux d'indépendance

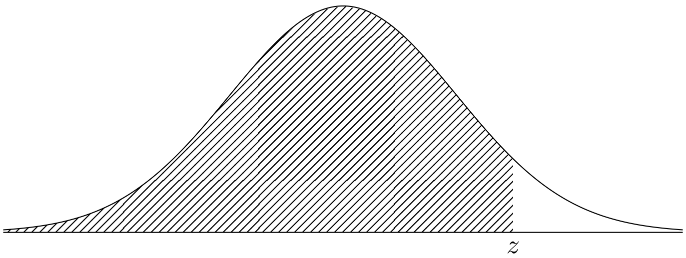
Soit $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ un n-échantillon d'un couple de variables aléatoires (X, Y) à valeur dans l'ensemble fini $E_1 \times E_2$. Sous l'hypothèse nulle, lorsque X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, on a la convergence en loi suivante :

$$D = n \sum_{i \in E_1} \sum_{j \in E_2} \frac{\left(\widehat{P}_{ij} - \widehat{P}_{i*}\widehat{P}_{*j}\right)^2}{\widehat{P}_{i*}\widehat{P}_{*j}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi((\text{card}(E_1) - 1)(\text{card}(E_2) - 1) \text{ ddl})$$

6 Table de la loi normale centrée réduite

Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Les valeurs de la fonction de répartition $z \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(Z \leq z)$ sont données dans le tableau suivant :

densité d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$



L'aire hachurée illustre $\mathbb{P}(Z \leq z)$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Pour $z \geq 3$ on peut utiliser l'approximation

$$\mathbb{P}(Z \leq z) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^3}\right).$$

Valeurs critiques au niveau 5% : loi normale centrée réduite

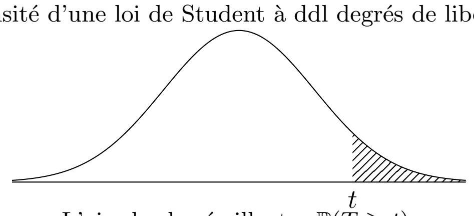
La valeur critique pour un test bilatéral de niveau 5% est 1.96 : $\mathbb{P}(|Z| \geq 1.96) = 0.05$.

La valeur critique pour un test unilatéral de niveau 5% est 1.645 : $\mathbb{P}(Z \geq 1.645) = 0.05$.

7 Valeurs critiques au niveau 5% : loi de Student

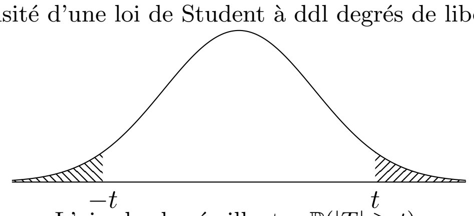
Soit T une variable aléatoire de loi de Student à ddl degrés de liberté. Les valeurs critiques pour effectuer un test unilatéral ou bilatéral au niveau 5% sont données au tableau suivant :

densité d'une loi de Student à ddl degrés de liberté



L'aire hachurée illustre $\mathbb{P}(T \geq t)$.

densité d'une loi de Student à ddl degrés de liberté



L'aire hachurée illustre $\mathbb{P}(|T| \geq t)$.

ddl	test unilatéral $\mathbb{P}(T \geq t) = 0.05$	test bilatéral $\mathbb{P}(\lvert T\rvert \geq t) = 0.05$
1	6.314	12.71
2	2.920	4.303
3	2.353	3.182
4	2.132	2.776
5	2.015	2.571
6	1.943	2.447
7	1.895	2.365
8	1.860	2.306
9	1.833	2.262
10	1.812	2.228
11	1.796	2.201
12	1.782	2.179
13	1.771	2.160
14	1.761	2.145
15	1.753	2.131
16	1.746	2.120
17	1.740	2.110
18	1.734	2.101
19	1.729	2.093
20	1.725	2.086
21	1.721	2.080
22	1.717	2.074
23	1.714	2.069
24	1.711	2.064
25	1.708	2.060
26	1.706	2.056
27	1.703	2.052
28	1.701	2.048
29	1.699	2.045
30	1.697	2.042

Lorsque le nombre de degrés de liberté (ddl) dépasse 30, la valeur critique au niveau 5% peut être calculée via les approximations suivantes :

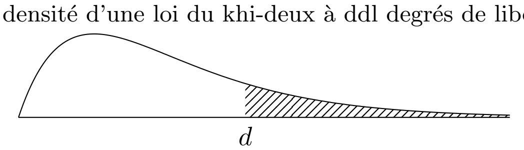
$$\mathbb{P}\left(T \geq \sqrt{\mathrm{ddl}\left(\exp\left(\frac{2 \times 1.645^2}{2\mathrm{ddl} - 1}\right) - 1\right)}\right) \approx 0.05 \text{ test unilatéral.}$$

$$\mathbb{P}\left(|T| \geq \sqrt{\mathrm{ddl}\left(\exp\left(\frac{2 \times 1.96^2}{2\mathrm{ddl} - 1}\right) - 1\right)}\right) \approx 0.05 \text{ test bilatéral.}$$

8 Valeurs critiques au niveau 5% : loi du khi-deux

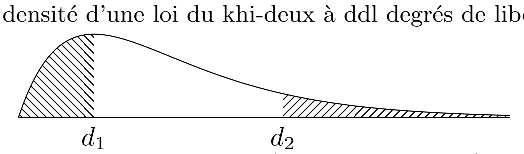
Soit D une variable aléatoire de loi de khi-deux à ddl degrés de liberté. Les valeurs critiques pour effectuer un test unilatéral ou bilatéral au niveau 5% sont données au tableau suivant :

densité d'une loi du khi-deux à ddl degrés de liberté



L'aire hachurée illustre $\mathbb{P}(D \geq d)$.

densité d'une loi du khi-deux à ddl degrés de liberté



L'aire hachurée illustre $\mathbb{P}(D \leq d_1 \text{ ou } D \geq d_2)$.

ddl	test unilatéral $\mathbb{P}(D \geq d) = 0.05$	test bilatéral $\mathbb{P}(D \leq d_1 \text{ ou } D \geq d_2)) = 0.05$	
1	3.8414	0.0009	5.0238
2	5.9914	0.0506	7.3777
3	7.8147	0.2157	9.3484
4	9.4877	0.4844	11.1432
5	11.0704	0.8312	12.8325
6	12.5915	1.2373	14.4493
7	14.0671	1.6898	16.0127
8	15.5073	2.1797	17.5345
9	16.9189	2.7003	19.0227
10	18.3070	3.2469	20.4831
11	19.6751	3.8157	21.9200
12	21.0260	4.4037	23.3366
13	22.3620	5.0087	24.7356
14	23.6847	5.6287	26.1189
15	24.9957	6.2621	27.4883
16	26.2962	6.9076	28.8453
17	27.5871	7.5641	30.1910
18	28.8692	8.2307	31.5263
19	30.1435	8.9065	32.8523
20	31.4104	9.5907	34.1696
21	32.6705	10.2829	35.4788
22	33.9244	10.9823	36.7807
23	35.1724	11.6885	38.0756
24	36.4150	12.4011	39.3640
25	37.6524	13.1197	40.6464
26	38.8851	13.8439	41.9231
27	40.1132	14.5733	43.1945
28	41.3371	15.3078	44.4607
29	42.5569	16.0470	45.7222
30	43.7729	16.7907	46.9792

Pour un degré de liberté supérieur à 30. la valeur critique au niveau 5% peut être calculée via les approximations suivantes

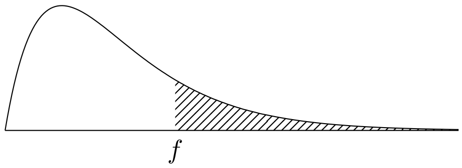
$$\mathbb{P}\left(Y \geq \mathrm{ddl}\left(1 - \frac{2}{9\mathrm{ddl}} + 1.645\sqrt{\frac{2}{9\mathrm{ddl}}}\right)^3\right) \approx 0.05 \text{ test unilatéral.}$$

$$\mathbb{P}\left(Y \geq \mathrm{ddl}\left(1 - \frac{2}{9\mathrm{ddl}} + 1.96\sqrt{\frac{2}{9\mathrm{ddl}}}\right)^3\right) + \mathbb{P}\left(Y \leq \mathrm{ddl}\left(1 - \frac{2}{9\mathrm{ddl}} - 1.96\sqrt{\frac{2}{9\mathrm{ddl}}}\right)^3\right) \approx 0.05 \text{ test bilatéral.}$$

9 Valeurs critiques au niveau 5% : loi de Fisher-Snedecor

Soit F une variable aléatoire de loi de Fisher-Snedecor à ddl_N degrés de liberté au numérateur et ddl_D degrés de liberté au dénominateur. Les valeurs critiques pour effectuer un test unilatéral ou bilatéral au niveau 5% sont données au tableau suivant :

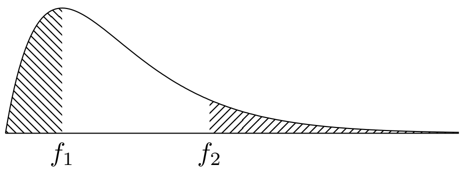
densité d'une loi de Fisher-Snedecor



L'aire hachurée illustre $\mathbb{P}(F \geq f)$.

	test unilatéral $\mathbb{P}(F \geq f) = 0.05$													
$ddl_N \rightarrow$ / $ddl_D \downarrow$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20	25	30
5	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68	4.66	4.64	4.62	4.56	4.52	4.50
6	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.98	3.96	3.94	3.87	3.83	3.81
7	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.55	3.53	3.51	3.44	3.40	3.38
8	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22	3.15	3.11	3.08
9	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.05	3.03	3.01	2.94	2.89	2.86
10	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86	2.85	2.77	2.73	2.70
11	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74	2.72	2.65	2.60	2.57
12	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	2.66	2.64	2.62	2.54	2.50	2.47
13	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60	2.58	2.55	2.53	2.46	2.41	2.38
14	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.48	2.46	2.39	2.34	2.31
15	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45	2.42	2.40	2.33	2.28	2.25
20	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22	2.20	2.12	2.07	2.04
25	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.20	2.16	2.14	2.11	2.09	2.01	1.96	1.92
30	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09	2.06	2.04	2.01	1.93	1.88	1.84

densité d'une loi de Fisher-Snedecor



L'aire hachurée illustre $\mathbb{P}(F \leq f_1 \text{ ou } F \geq f_2)$.

	test bilatéral $\mathbb{P}(F \geq f_2) = 0.025$													
$ddl_N \rightarrow$ / $ddl_D \downarrow$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20	25	30
5	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.57	6.52	6.49	6.46	6.43	6.33	6.27	6.23
6	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.41	5.37	5.33	5.30	5.27	5.17	5.11	5.07
7	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.71	4.67	4.63	4.60	4.57	4.47	4.40	4.36
8	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.24	4.20	4.16	4.13	4.10	4.00	3.94	3.89
9	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.91	3.87	3.83	3.80	3.77	3.67	3.60	3.56
10	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.66	3.62	3.58	3.55	3.52	3.42	3.35	3.31
11	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.47	3.43	3.39	3.36	3.33	3.23	3.16	3.12
12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.32	3.28	3.24	3.21	3.18	3.07	3.01	2.96
13	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.20	3.15	3.12	3.08	3.05	2.95	2.88	2.84
14	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.09	3.05	3.01	2.98	2.95	2.84	2.78	2.73
15	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	3.01	2.96	2.92	2.89	2.86	2.76	2.69	2.64
20	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.72	2.68	2.64	2.60	2.57	2.46	2.40	2.35
25	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.56	2.51	2.48	2.44	2.41	2.30	2.23	2.18
30	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.20	2.12	2.07

On a $0.025 = \mathbb{P}(F \leq f_1) = \mathbb{P}(1/F \geq 1/f_1)$. Comme $1/F$ suit une loi de Fisher (dont les degrés de libertés, par rapport à F, sont inversés), on peut déterminer $1/f_1$ via le tableau précédent.