Solution du devoir maison : Statistique pour les big data (année 2022-2023)

Patrick Tardivel,
Université de Bourgogne, Dijon

Exercice 1. *Soit* $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ *et* $b \in \mathbb{R}^3$ *définis par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. *En utilisant la propriété du noyau, pouvez-vous prouver que* $x^* = (0,0,1,1)$ *est une solution du problème poursuite de base du système* $Ax = b$ *? Justifiez votre réponse.*
2. *En utilisant la caractérisation des solutions poursuite de base, pouvez-vous prouver que* x^* *est une solution poursuite de base du système ? Justifiez votre réponse.*

Solution : 1) On a $\ker(A) = \text{vect}\{(1,0,1,-1)^T\}$. Soit $h = (t,0,t,-t)^T \in \ker(A)$ avec $t \in \mathbb{R}$ alors

$$\sum_{i \in \text{supp}(x^*)} |h_i| = |h_3| + |h_4| = 2|t| \text{ et } \sum_{i \in \text{supp}(x^*)} |h_i| = |h_1| + |h_2| = t$$

Ainsi, la propriété du noyau n'est pas satisfaite :

$$\exists h \in \ker(A), \sum_{i \in \text{supp}(x^*)} |h_i| > \sum_{i \in \text{supp}(x^*)} |h_i|.$$

Donc, on ne peut pas conclure que x^* est la solution poursuite de base du système $Ax = b$.

2) Par ailleurs,

$$\left| \sum_{i \in \text{supp}(x^*)} \text{signe}(x^*) h_i \right| = |h_3 + h_4| = 0 \text{ et } \sum_{i \in \text{supp}(x^*)} |h_i| = |h_1| + |h_2| = t.$$

Ainsi, la caractérisation analytique du problème poursuite de base est satisfaite :

$$\forall h \in \ker(A) \left| \sum_{i \in \text{supp}(x^*)} \text{signe}(x^*) h_i \right| \leq \sum_{i \in \text{supp}(x^*)} |h_i|.$$

On peut donc conclure que x^* est une solution poursuite de base du système $Ax = b$.

Exercice 2. *Soit* $A = (A_1|\dots|A_p) \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $b \in \text{im}(A)$ *et* x^* *une solution du système* $Ax = b$*. On rappelle que les assertions i), ii) et iii) sont équivalentes*

i) $x^* \in S_{A,\text{pb}}(b)$.

ii) Il existe $z \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $\|A^T z\|_\infty \le 1$ *et* $A_j^T z = \mathrm{signe}(x_j^*)$ *pour tout* $j \in \mathrm{supp}(x^*)$.

iii) Pour tout $h \in \ker(A)$ *on a*

$$\left|\sum_{i\in \mathrm{supp}(x^*)} \mathrm{signe}(x_i^*) h_i\right| \le \sum_{i \notin \mathrm{supp}(x^*)} |h_i|.$$

Montrer que l'assertion ii) implique l'assertion iii).

Solution : On suppose que l'assertion ii) est satisfaite pour un certain $z \in \mathbb{R}^n$. Soit $h \in \ker(A)$, comme $z^T Ah = 0$ en en déduit l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} 0 = z^T Ah &= z^T \left(\sum_{i\in \mathrm{supp}(x^*)} h_i A_i + \sum_{i \notin \mathrm{supp}(x^*)} h_i A_i \right) \\ &= \sum_{i\in \mathrm{supp}(x^*)} h_i z^T A_i + \sum_{i \notin \mathrm{supp}(x^*)} h_i z^T A_i \\ &= \sum_{i\in \mathrm{supp}(x^*)} h_i \mathrm{signe}(x_i^*) + \sum_{i \notin \mathrm{supp}(x^*)} h_i z^T A_i \end{aligned}$$

Comme $\|A^T z\|_\infty = \max\{|z^T A_1|, \ldots, |z^T A_p|\} \le 1$ on en déduit que

$$\left|\sum_{i\in \mathrm{supp}(x^*)} \mathrm{signe}(x_i^*) h_i\right| = \left|\sum_{i \notin \mathrm{supp}(x^*)} h_i z^T A_i\right| \le \sum_{i \notin \mathrm{supp}(x^*)} |h_i||z^T A_i| \le \sum_{i \notin \mathrm{supp}(x^*)} |h_i|.$$

Exercice 3. *Soit* $A = (A_1|\ldots|A_p) \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $b \in \mathrm{im}(A)$ *et* x^* *une solution du système* $Ax = b$. *Récemment, Gilbert [2017] a démontré l'équivalence suivante*

$$S_{A,\mathrm{pb}}(b) = \{x^*\} \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \begin{cases} \forall i \in \mathrm{supp}(x^*) \ A_i^T z = \mathrm{signe}(x_i^*) \\ \forall i \notin \mathrm{supp}(x^*) \ |A_i^T z| < 1 \\ \text{La famille } (A_i)_{i\in \mathrm{supp}(x^*)} \text{ est linéairement indépendante} \end{cases}.$$

Montrer l'implication "$\Leftarrow$*".*

PS : *On pourra montrer que* $\|x^*\|_1 = b^T z$. *On pourra également démontrer que si* $\tilde{x}$ *est une solution de* $Ax = b$ *telle que* $\mathrm{supp}(\tilde{x}) \not\subset \mathrm{supp}(x^*)$ *alors* $b^T z < \|\tilde{x}\|_1$.

Solution (première méthode) Établissons que $\|x^*\|_1 = b^T z$. Comme $b = Ax^* = \sum_{i\in \mathrm{supp}(x^*)} x_i^* A_i$ on a :

$$\|x^*\|_1 = \sum_{i\in \mathrm{supp}(x^*)} |x_i^*| = \sum_{i\in \mathrm{supp}(x^*)} \mathrm{signe}(x_i^*) x_i^* = \sum_{i\in \mathrm{supp}(x^*)} A_i^T z x_i^* = \left(\sum_{i\in \mathrm{supp}(x^*)} x_i^* A_i \right)^T z = b^T z.$$

Soit $\tilde{x}$ une solution de $Ax = b$ telle que $\mathrm{supp}(\tilde{x}) \not\subset \mathrm{supp}(x^*)$. Montrons que $b^T z < \|\tilde{x}\|_1$:

$$b^T z = \tilde{x}^T A^T z = \sum_{i=1}^p \tilde{x}_i A_i^T z = \sum_{i\in supp(x^*)} \tilde{x}_i A_i^T z + \sum_{i \notin supp(x^*)} \tilde{x}_i A_i^T z.$$

Comme $|A_i^T z| < 1$ pour $i \notin \mathrm{supp}(x^*)$ et qu'il existe $\tilde{x}_i \neq 0$ avec $i \notin \mathrm{supp}(x^*)$ (car $\mathrm{supp}(\tilde{x}) \not\subset \mathrm{supp}(x^*)$) on en déduit que $\sum_{i \notin supp(x^*)} \tilde{x}_i A_i^T z < \sum_{i \notin supp(x^*)} |\tilde{x}_i|$. Ainsi,

$$b^T z < \sum_{i \in supp(x^*)} |\tilde{x}_i| + \sum_{i \notin supp(x^*)} |\tilde{x}_i| = \|\tilde{x}\|_1$$

Par conséquent, si $\hat{x}$ est une solution poursuite de base du système $Ax = b$ alors $\|\hat{x}\|_1 \leq \|x^*\|$ et donc $supp(\hat{x}) \subseteq supp(x^*)$. Montrons que $\hat{x} = x^*$. L'égalité $A\hat{x} = Ax^*$ peut se réécrire sous la forme suivante :

$$A\hat{x} = \sum_{i \in supp(x^*)} \hat{x}_i A_i = Ax^* = \sum_{i \in supp(x^*)} x_i^* A_i.$$

La famille $(A_i)_{i \in \mathrm{supp}(x^*)}$ étant linéairement indépendante on en déduit que pour tout $i \in \mathrm{supp}(x^*)$, $\hat{x}_i = x_i^*$ et par conséquent, comme $supp(\hat{x}) \subseteq supp(x^*)$, $\hat{x} = x^*$.

Solution (deuxième méthode) Si $\ker(A) = \{0\}$ alors x^* est l'unique solution du système $Ax^* = b$ et par conséquent $S_{A,\mathrm{pb}}(b) = \{x^*\}$. Supposons à présent que $\{0\} \subsetneq \ker(A)$. Soit $h \in \ker(A) \setminus \{0\}$, comme $z^T Ah = 0$ en en déduit l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} 0 = z^T Ah &= z^T \left(\sum_{i \in \mathrm{supp}(x^*)} h_i A_i + \sum_{i \notin \mathrm{supp}(x^*)} h_i A_i \right) \\ &= \sum_{i \in \mathrm{supp}(x^*)} h_i z^T A_i + \sum_{i \notin \mathrm{supp}(x^*)} h_i z^T A_i \\ &= \sum_{i \in \mathrm{supp}(x^*)} h_i \mathrm{signe}(x_i^*) + \sum_{i \notin \mathrm{supp}(x^*)} h_i z^T A_i \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\left| \sum_{i \in \mathrm{supp}(x^*)} \mathrm{signe}(x_i^*) h_i \right| = \left| \sum_{i \notin \mathrm{supp}(x^*)} h_i z^T A_i \right|.$$

Pour conclure la preuve, il suffit de montrer que $\sum_{i \notin \mathrm{supp}(x^*)} |h_i|$ est strictement plus grand que le membre droit de l'égalité précédente. La famille $(A_i)_{i \in \mathrm{supp}(x^*)}$ étant linéairement indépendante on en déduit que $\mathrm{supp}(h) \not\subset \mathrm{supp}(x^*)$. En effet, si $\mathrm{supp}(h) \subset \mathrm{supp}(x^*)$ alors $0 = Ah = \sum_{i \in \mathrm{supp}(x^*)} h_i A_i$ d'où $h = 0$ car la famille $(A_i)_{i \in \mathrm{supp}(x^*)}$ est linéairement indépendante, ce qui contredit que $h \neq 0$. Comme $|A_i^T z| < 1$ pour $i \notin \mathrm{supp}(x^*)$ et qu'il existe $h_i \neq 0$ avec $i \notin \mathrm{supp}(x^*)$ (car $\mathrm{supp}(h) \not\subset \mathrm{supp}(x^*)$) on en déduit l'inégalité suivante

$$\left| \sum_{i \notin supp(x^*)} h_i z^T A_i \right| \leq \sum_{i \notin supp(x^*)} |h_i| |z^T A_i| < \sum_{i \notin supp(x^*)} |h_i|.$$

Ainsi,

$$\forall h \in \ker(A) \setminus \{0\} \quad \left| \sum_{i \in \mathrm{supp}(x^*)} \mathrm{signe}(x^*) h_i \right| < \sum_{i \in \mathrm{supp}(x^*)} |h_i|$$

ce qui implique que $S_{A,\mathrm{pb}}(b) = \{x^*\}$.

Références

Jean Charles Gilbert. On the solution uniqueness characterization in the l1 norm and polyhedral gauge recovery. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 172(1) :70–101, 2017.