Contrôle continu : Statistique

Patrick Tardivel
Université de Bourgogne

14/03/2022

Exercice 1 (Questions de cours)**.**

1. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles de loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ où $p \in]0,1[$. Rappeler le théorème de Moivre-Laplace.*
2. *Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles de loi binomiale $\mathcal{B}(n;p_n)$ où le paramètre $p_n \in]0,1[$ vérifie $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$ avec $\lambda > 0$. Dans ce cadre, rappeler la convergence de la loi binomiale vers une loi de Poisson.*
3. *Soit S une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(1000;0,01)$. Calculer, de façon exacte, la probabilité $\mathbb{P}(S \leq 5)$. Donner une approximation de cette probabilité en utilisant le théorème de Moivre-Laplace. Même question en approximant la loi de S par une loi de Poisson.*

Exercice 2. *Les experts estiment que le nombre de morts dus au Covid-19 sur une semaine est lié au nombre de cas de Covid-19 trois semaines avant. Le nombre de décès en France durant les quatre dernières semaines (07/02-13/02), (14/02-20/02), (21/02-27/02) et (28/02-06/03) ainsi que le nombre de cas durant les semaines (17/01-23/01), (24/01-30/01), (31/01-06/02) et (07/02-13/02) sont donnés dans le tableau suivant :*

Cas (en milliers)	2460 (17/01 – 23/01)	2287 (24/01 – 30/01)	1630 (31/01 – 06/02)	936 (07/02 – 13/02)
Morts	2268 (07/02 – 13/02)	1729 (14/02 – 20/02)	1463 (21/02 – 27/02)	1078 (28/02 – 06/03)

1. *Calculer la droite des moindres carrés du nombre de décès en fonction du nombre de cas (en milliers) lorsque les poids sont respectivement $0,1$; $0,15$; $0,25$ et $0,5$.*
2. *Pour la semaine du (28/02-06/03) le nombre de cas, en milliers, est de 348. Prévoir le nombre de décès pour la semaine du (21/03-27/03).*

Exercice 3. *Un carré mesure μ cm de côté où $\mu > 0$ est inconnu. On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ modélisant des mesures aléatoires du côté du carré. On cherche à estimer l'aire du carré.*
Indications : les formules suivantes sont admises :

— *Si X suit une loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, alors $E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$ et $var(X^2) = 2(\sigma^4 + 2\mu^2\sigma^2)$.*
— *Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes alors, $E(XY) = E(X)E(Y)$.*
— *Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi alors, $var(XY) = E(X^2)^2 - E(X)^4$.*

1. *Considérons l'estimateur $T_1 = X_1X_2$ de μ^2.*
   (a) *Calculer le biais $B_{\mu^2}(T_1)$ pour μ^2.*
   (b) *Calculer l'erreur quadratique moyenne $EQM_{\mu^2}(T_1)$.*
2. *Considérons l'estimateur $T_2 = \dfrac{X_1^2 + X_2^2}{2}$ de μ^2.*
   (a) *Calculer le biais $B_{\mu^2}(T_2)$ pour μ^2.*
   (b) *Calculer l'erreur quadratique moyenne $EQM_{\mu^2}(T_2)$.*
3. *Considérons l'estimateur $T_3 = \left(\dfrac{X_1 + X_2}{2}\right)^2$ de μ^2.*
   (a) *Calculer le biais $B_{\mu^2}(T_3)$ pour μ^2.*
   (b) *Calculer l'erreur quadratique moyenne $EQM_{\mu^2}(T_3)$.*
4. *Quel est le meilleur estimateur au sens de l'erreur quadratique moyenne ?*
5. *Soit $X_1, ..., X_n$ un n-échantillon de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Proposer un estimateur pour μ^2, calculer son biais et son erreur quadratique moyenne.*