Chapitre 4 : Procédures de test et p-values

Soit $X : \underbrace{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})}_{\text{espace probabilisé}} \longrightarrow \underbrace{(\mathcal{X}, \mathcal{x})}_{\text{espace probabilisable.}}$

une variable aléatoire.

On pose $\mathcal{P}$ une famille de loi sur $(\mathcal{X}, \mathcal{x})$ et on suppose que $\mathbb{P}^X$, la loi de X appartient à $\mathcal{P}$.

Un problème de test peut s'écrire sous la forme

(*) Pour $A \in \mathcal{x}$, $\mathbb{P}^X(A) = \Pr(X \in A)$
$= \Pr(\{w \in \Omega \quad X(w) \in A\})$

$X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{x})$
$\mathbb{P}^X \in \mathcal{P}$ (où $\mathcal{P}$ est une famille de loi sur $(\mathcal{X}, \mathcal{x})$)
$H^0 : \mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^0$ $\mathcal{P}^0$ ensemble de $\mathcal{P}$.

Exemple : (ajustement d'une probabilité)

On considère $X = (X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de loi $\mathcal{B}(p)$. On souhaite savoir si $p \neq \frac{1}{2}$.

* L'espace des observations est $\mathcal{X} = \{0, 1\}^n$

* La loi de X appartient à $\mathcal{P} = \{\mathcal{B}(p)^{\otimes n} : p \in [0;1]\}$

* L'hypothèse nulle est $p = \frac{1}{2}$ donc

$$\mathcal{P}^0 = \{\mathcal{B}(\tfrac{1}{2})^{\otimes n}\}$$

Exemple : (Comparaison de probabilités)

On considère $X = (Y_1, \dots, Y_{n_1}, Z_1, \dots, Z_{n_2})$ deux échantillons indépendants de loi $\mathcal{B}(p_1)$ et $\mathcal{B}(p_2)$
On souhaite savoir si $p_2 > p_1$.

* L'espace des observations :

$$\mathcal{X} = \{0, 1\}^{(n_1+n_2)}$$

* La loi de X appartient à

$$\mathcal{P} = \{ \mathcal{B}(p_1)^{\otimes n_1} \otimes \mathcal{B}(p_2)^{\otimes n_2} : 0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1 \}$$

* On teste l'hypothèse nulle $p_1 = p_2 = p_0$, donc

$$\mathcal{P}^0 = \{ \mathcal{B}(p_0)^{\otimes (n_1+n_2)} : p_0 \in [0 ; 1] \}.$$

Exemple : (moyenne d'une différence).

On considère $X = (X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon gaussien modélisant la différence d'une quantité mesurée "avant - après".
On souhaite savoir si la différence moyenne est non-nulle.

* L'espace des observations est $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$

* La loi de X appartient à

$$\mathcal{P} = \{ \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)^{\otimes n} : \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^{+*} \}.$$

* L'hypothèse nulle est $\mu = 0$:

$$\mathcal{P}^0 = \{ \mathcal{N}(0, \sigma^2)^{\otimes n} : \sigma > 0 \}.$$

Le nom hypothèse nulle vient de cette hypothèse

Soit $R \in \mathcal{X}$ (appelée <u>région critique</u>); le risque de première espèce de la procédure de rejet de H^0 lorsque $X \in R$ est $\alpha : \underset{\in \mathcal{P}^0}{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}(R)$

* Le risque de première espèce maximal est $\sup\{\mathbb{P}(R) : \mathbb{P} \in \mathcal{P}^0\}$.

* Le risque P.E est de niveau $\alpha \in [0;1]$ si $\sup\{\mathbb{P}(R) : \mathbb{P} \in \mathcal{P}^0\} \leq \alpha$

Sous l'hypothèse nulle, lorsque $\mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^0$ on a,
$P_x(X \in R) = \mathbb{P}^X(R) \leq \alpha$

Proposition (p-valeur) :

On considère le problème de test :

$$\begin{cases} X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathcal{X}, x) \\ \mathbb{P}^X \in \mathcal{P} \quad \text{où} \quad \mathbb{P}^X \text{ est la loi de } X \text{ et } \mathcal{P} \\ \text{est une famille de loi sur } (\mathcal{X}, x) \\ H_0 : \mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^0 \text{ est un sous-ensemble de } \mathcal{P} \end{cases}$$

$(R_\alpha)_{\alpha \in]0;1[}$ est une famille de régions de rejet emboîtées avec $R_1 = \mathcal{X}$ et $R_\alpha \subset R_{\alpha'}$ dès que $\alpha \leq \alpha'$ et $\forall \alpha \in]0;1[$

$$\sup\{\mathbb{P}(R_\alpha) : \mathbb{P} \in \mathcal{P}^0\} \leq \alpha$$

On pose $p(X) := \inf\{\alpha \in]0;1[: X \in R_\alpha\}$
alors sous H_0 on a,

$$\forall u \in [0;1] \quad \mathbb{P}(p(X) \leq u) \leq u)$$

↳ p est stochastiquement plus large qu'une loi uniforme.
(tendance à prendre des valeurs plus proche de 1)

Preuve : Comme les régions de rejet sont emboîtées, l'ensemble $\{\alpha \in]0;1] : X \in R_\alpha\}$ est un intervalle (non-vide car contient 1) dont la borne inf est $p(X)$.

- Soit $u \in]0;1[$ alors $p(X) \leq u$ implique que $X \in R_\alpha$ dès que $\alpha > u$.
Sous H_0, lorsque $\mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^0$, alors,

$$\forall \alpha > u \quad \mathbb{P}(p(X) \leq u) \leq \mathbb{P}(X \in R_\alpha)$$
$$= \mathbb{P}^X(R_\alpha)$$
$$\leq \sup\{\mathbb{P}(R_\alpha) : \mathbb{P} \in \mathcal{P}^0\}$$
$$\leq \alpha \quad (*)$$

On en déduit que $\mathbb{P}(p(X) \leq u) \leq u$.
(car $\forall \alpha > u$ $(*)$)

- Si $u = 1$ alors $\mathbb{P}(p(X) \leq 1) \leq 1$ (par définition d'une probabilité).

- Si $u = 0$ alors par le théorème des gendarmes (encadré par 0 et une exp. qui tend vers 0) on a $\mathbb{P}(p(X) \leq 0) \leq 0$.

$\square$

Exemples: (calcul de p-valeur).

Exercice 1 : (test d'ajustement d'une moyenne)

$\mu_0 \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$

$$\begin{cases} X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \\ \mathbb{P}^X \in \mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \sigma > 0\} \\ H_0 : \mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^0 = \{\mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)^{\otimes n}, \sigma > 0\} \end{cases}$$

i.e on teste $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

• Statistique : $T(X) = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{S^2_{corr}/n}}$

où $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $S^2_{corr} = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

Sous H_0 (lorsque $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)$)
$T(X) \sim$ Student ($n-1$ ddl)

Q°1 : $\alpha \in]0;1[$, on rejette H_0 lorsque

$$|T(X)| > F_0^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

où F_0^{-1} est la fonction de rép. d'une Student à $n-1$ ddl. Déterminer la p-valeur et donner sa loi sous H^0.

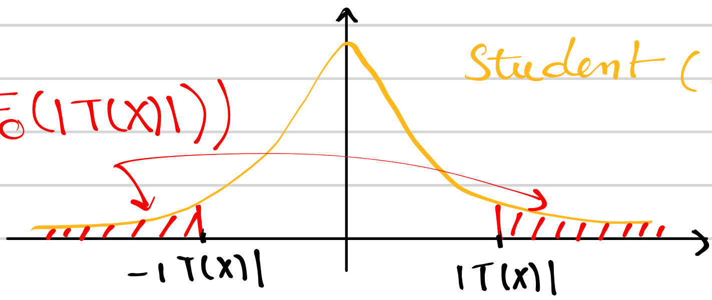
Q°2 : Réécrire la procédure de test lorsque $H_1 : \mu > \mu_0$ et calculer la p-valeur.

R1 : $R_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |T(x)| > F_0^{-1}\left(1 - \alpha/2\right) \right\}$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
p(X) &= \inf\left\{ \alpha \in]0;1[: |T(X)| > F_0^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right\} \\
&= \inf\left\{ \alpha \in]0;1[: F_0(|T(X)|) > 1 - \frac{\alpha}{2} \right\} \\
&= \inf\left\{ \alpha \in]0;1[: \alpha > 2\left(1 - F_0(|T(X)|)\right) \right\} \\
&= 2\left(1 - F_0(|T(X)|)\right)
\end{aligned}$$

$p(X) = 2(1 - F_0(|T(X)|))$



On détermine maintenant la loi de $p(X)$.

Soit $u \in]0;1[$ alors,

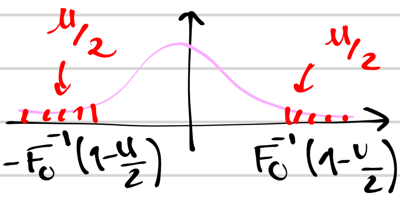
$$\begin{aligned} \Pr(p(X) \leq u) &= \Pr\left(2(1-F_0(|T(X)|)) \leq u\right) \\ &= \Pr\left(F_0(|T(X)|) \leq 1-\frac{u}{2}\right) \\ &= \Pr\left(|T(X)| \leq F_0^{-1}\left(1-\frac{u}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

Comme sous $\mathcal{H}_0$, $T(X)$ suit une Student à $n-1$ ddl on a,

$$\Pr\left(|T(X)| \geq F_0^{-1}\left(1-\frac{u}{2}\right)\right) = \underbrace{\frac{u}{2} + \frac{u}{2}}_{} = u$$

$$\Pr\left(T(X) \geq F_0^{-1}\left(1-\frac{u}{2}\right)\right) + \Pr\left(T(X) \leq -F_0^{-1}\left(1-\frac{u}{2}\right)\right)$$

+ propriété de la loi de Student



<u>R2:</u> On considère le test suivant,

$$\begin{cases} X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \\ \mathbb{P}^X \in \mathcal{P} = \{ \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \sigma > 0, \mu > \mu_0) \\ \mathcal{H}_0 : \mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^0 = \{ \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)^{\otimes n}, \sigma > 0) \end{cases}$$

ie. on teste $\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0$ vs $\mathcal{H}_1 : \mu > \mu_0$

On rejette $\mathcal{H}_0$ lorsque $T(X) > F_0^{-1}(1-\alpha)$

$$\begin{aligned} p(X) &= \inf\{\alpha \in]0;1[: T(X) > F_0^{-1}(1-\alpha)\} \\ &= \inf\{\alpha \in]0;1[: F_0(T(X)) > 1-\alpha\} \\ &= \inf\{\alpha \in]0;1[: \alpha > 1 - F_0(T(X))\} \\ &= \underline{1 - F_0(T(X))}. \end{aligned}$$

F_0 strict $\nearrow$

Exercice 2 : (test d'ajustement de variance)

$\sigma_0 > 0$ et $n \geq 2$

$$\begin{cases} X : (\Omega, \mathcal{A}, P_r) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \\ \mathbb{P}^X \in \mathcal{P} = \{ \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)^{\otimes n}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0 \} \\ H_0 : \mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^0 = \{ \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)^{\otimes n}, \mu \in \mathbb{R} \} \end{cases}$$

ie $H_0 : \sigma = \sigma_0$ vs. $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$ (bilatéral)

- Statistique : $Y(X) = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$.

Sous H_0 $((X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2))$ alors $Y(X)$ suit une loi du χ^2 ($n-1$ ddl).

Q1 : $\alpha \in]0;1[$. On rejette H_0 lorsque

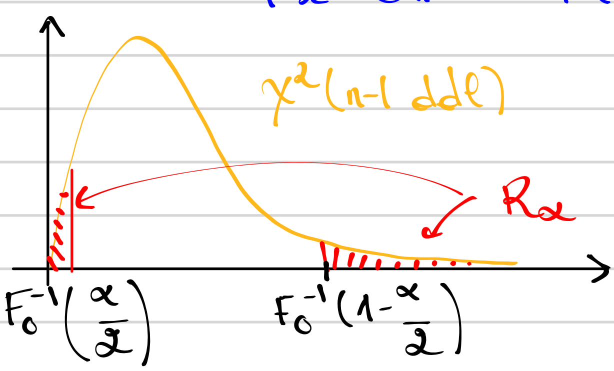
$Y(X) > F_0^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ → F_0 F.R de $\chi^2(n-1)$

ou $Y(X) < F_0^{-1}(\frac{\alpha}{2})$.

Calculer la p-valeur et donner sa loi.

Q2 : Réécrire la procédure de test quand $H_1 : \sigma > \sigma_0$. Calculer la p-valeur.

R1 : $R_\alpha = \{ x \in \mathbb{R}^n : Y(X) > F_0^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \}$
$\cup \{ x \in \mathbb{R}^n : Y(x) < F_0^{-1}(\frac{\alpha}{2}) \}$



$p(X) = \inf\{ \alpha \in]0;1[: Y(X) \in R_\alpha \}$

$$p(X) = \inf\left\{ \alpha \in]0;1[,\ F_0(Y(X)) < \frac{\alpha}{2} \text{ ou } F_0(Y(X)) > 1 - \frac{\alpha}{2} \right\}$$

$$= \inf\left\{ \alpha \in]0;1[,\ \alpha > 2F_0(Y(X)) \text{ ou } \alpha > 2(1 - F_0(Y(X))) \right\}$$

$$= 2 \min\left\{ F_0(Y(X)),\ 1 - F_0(Y(X)) \right\}$$

On détermine maintenant la loi de $p(X)$.
Soit $u \in]0;1[$,

$$\Pr(p(X) \leq u) = \Pr(2\min\{F_0(Y(X)), 1 - F_0(Y(X))\} \leq u)$$
$$= \Pr\left(F_0(Y(X)) \leq \frac{u}{2} \text{ ou } F_0(Y(X)) \leq 1 - \frac{u}{2}\right)$$
$$= \Pr\left(Y(X) \leq F_0^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)\right) + \Pr\left(Y(X) \leq F_0^{-1}\left(1 - \frac{u}{2}\right)\right),$$
$$= \frac{u}{2} + \frac{u}{2} = u$$

Sous H_0, $\sigma = \sigma_0$ et $Y(X) \sim \chi^2(n-1)$ on a, $\Pr(p(X) \leq u) = u$ donc $p(X)$ suit une loi uniforme sur $[0;1]$.

R2: On considère le test suivant, $\sigma_0 > 0$

$$\begin{cases} X : (\Omega, \mathcal{A}, P_r) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \\ \mathbb{P}^X \in \mathcal{P} = \{ \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)^{\otimes n}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma \geq \sigma_0 \} \\ H_0 : \mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^0 = \{ \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)^{\otimes n}, \mu \in \mathbb{R} \} \end{cases}$$

ie $H_0 : \sigma = \sigma_0$ vs $H_1 : \sigma > \sigma_0$ (unilatéral sup).

On rejette H_0 lorsque $Y(X) > F_0^{-1}(1-\alpha)$

$$p(X) = \inf\{ \alpha \in]0;1[: Y(X) > F_0^{-1}(1-\alpha) \}$$
$$= \inf\{ \alpha \in]0;1[: F_0(Y(X)) > 1 - \alpha \}$$
$$= 1 - F_0(Y(X))$$

Définition : (Inverse généralisé)

Soit $F : \mathbb{R} \to [0;1]$ une fonction croissante continue à droite vérifiant :

$$\lim_{t \to \infty} F(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to -\infty} F(t) = 1$$

L'inverse généralisé est définie par

$$\forall \eta \in]0;1[. \quad F^{(-1)}(\eta) := \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq \eta\} .$$

Exemple :

- Si F est inversible alors $F^{(-1)} = F^{-1}$
- Soit F la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$ alors,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 3/4 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 1 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

probabilité d'avoir moins de t succès

$$F^{(-1)}(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < \eta \leq \frac{1}{4} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{4} < \eta \leq \frac{3}{4} \\ 2 & \text{si } \frac{3}{4} < \eta < 1 \end{cases}$$

Proposition :

Soit $F : \mathbb{R} \to [0;1]$ une fonction croissante continue à droite et vérifiant $\lim F(t) = 0$ et $\lim F(t) = 1$ alors $\forall \eta \in]0;1[$,

$$F(F^{(-1)}(\eta)) \geq \eta.$$

Preuve : Comme $\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq \eta\}$ est un intervalle (non-borné) dont la borne inférieure est $F^{(-1)}(\eta)$ on a,

$$\forall t > F^{(-1)}(\eta), \quad F(t) \geq \eta$$

Ainsi, la limite à droite de F en $F^{(-1)}(\eta)$ vérifie $\lim\limits_{t \to F^{(-1)}(\eta)^+} F(t) \geq \eta$.

De plus comme F est continue à droite on a,
$\lim\limits_{t \to F^{(-1)}(\eta)^+} F(t) = F(F^{(-1)}(\eta))$

Donc $F(F^{(-1)}(\eta)) \geq \eta$.

Exemple : La fonction de répartition d'une loi $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$ alors.

$$F(F^{(-1)}(\eta)) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } 0 < \eta \leq 1/4 \\ 3/4 & \text{si } 1/4 < \eta \leq 3/4 \\ 1 & \text{si } 3/4 < \eta < 1 \end{cases}$$

Exercice (test d'ajustement d'une probabilité).

Soit $p_0 \in]0;1[$. $\begin{cases} X : (\Omega, \mathcal{A}, P_r) \to (\{0 \dots n\}, \mathcal{P}(\{0 \dots n\})) \\ \mathbb{P}^X \in \mathcal{P} = \{\mathcal{B}(n,p), p \in [p_0;1]\} \\ H^0 : \mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^0 = \{\mathcal{B}(n, p_0)\}. \end{cases}$

ie. on teste $\mathcal{H}^0 : p = p_0$ vs $\mathcal{H}^1 : p > p_0$

1.) Soit $\alpha \in]0;1[$. Avec un risque de première espèce α on rejette $\mathcal{H}^0$ lorsque $X > F_0^{(-1)}(1-\alpha)$ où F_0 est la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{B}(n, p_0)$.
Déterminons la p-valeur de cette procédure.

2) Est-ce que la p-valeur suit une loi $\mathcal{U}([0;1])$ sous $\mathcal{H}^0$?

Q1 : On a

$$p(X) = \inf\{\alpha \in]0;1[: X > F_0^{(-1)}(1-\alpha)\}$$
$$= \inf\{\alpha \in]0;1[: X \geqslant F_0^{(-1)}(1-\alpha) + 1\}$$

Montrons que,

$$p(X) = 1 - F_0(X-1).$$

Soit $\alpha \in]0;1[$ tel que,

$$X \geqslant F_0^{(-1)}(1-\alpha) + 1$$

alors,

$$X - 1 \geqslant F_0^{(-1)}(1-\alpha)$$

d'où,

$$F_0(X-1) \geqslant F_0(F_0^{(-1)}(1-\alpha))$$
$$\geqslant 1-\alpha$$

donc,

$$\alpha \geqslant 1 - F_0(X-1)$$

ainsi,

$$p(X) \geqslant 1 - F_0(X-1)$$

Inversement,

si $\alpha > 1 - F_0(X-1)$ alors $F_0(X-1) > 1-\alpha$

donc $X-1 \geqslant F_0^{(-1)}(1-\alpha)$

ainsi $X \geqslant F_0^{(-1)}(1-\alpha) + 1$

donc,

$$p(X) \leqslant 1 - F_0(X-1)$$

ainsi,

$$p(X) = 1 - F_0(X-1)$$

Q2: Non la p-valeur est discrète à valeurs dans $\{1, 1-F_0(0), 1-F_0(1), \dots, 1-F_0(n-1)\}$

Procédure de tests multiple

On considère le problème de test multiple

$$\begin{cases} X : (\Omega, \mathcal{A}, \Pr) \longrightarrow (\mathcal{X}, x) \\ \mathbb{P}^X \in \mathcal{P} \text{ où } \mathcal{P} \text{ est une famille de lois sur } (\mathcal{X}, x) \\ \text{Pour tout } j \in \{1, \dots, n\} \quad \mathcal{H}^{0,j} : \mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^{0,j} \subset \mathcal{P}. \end{cases}$$

On suppose que pour $j \in \{1, \dots, n\}$ il existe une p-valeur $p_j(X)$ telle que :

Si $\mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^{0,j}$ alors $\forall t \in [0;1]$

$$\Pr(p_j(X) \leq t) \leq t$$

Vrais positifs, vrais négatifs, faux positifs, faux négatifs.

On pose $\mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X) = \{ j \in \{1, \dots, n\} : \mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^{0,j} \}$

(ensemble inconnu des hypothèse nulles vraies).

On suppose que l'on rejette $\mathcal{H}^{0,j}$ lorsque $p_j(X) < s$.

* Vrais positifs : ensemble des hypothèses nulles rejetées à raison. (car $\mathbb{P}^X \notin \mathcal{P}^{0,j}$)
$VP(x) = \{ j \notin \mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X) : p_j(x) < s \}$

* Faux positifs : ensemble des hypothèses nulles rejetées à tort. ($\mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^{0,j}$)
$FP(x) = \{ j \in \mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X) : p_j(x) < s \}$

* Vrais négatifs : ensemble des hypothèses nulles acceptées à raison ($\mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^{0,j}$)
$VN(x) = \{ j \in \mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X) : p_j(x) \geq s \}$

$FN(x) = \{ j \notin \mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X) : p_j(x) \geq \delta \}$ * Fausse négatifs : ensemble des hypothèses nulle acceptées à tort ($\mathbb{P}^X \notin \mathcal{P}^{0,j}$)

Le "Family Wise Error Rate" est la proba d'erreur d'avoir un ou plusieurs faux positifs.

Nous allons introduire des procédures de test multiple contrôlant le "Family Wise Error Rate" (FWER).

Proposition : (procédure de Bonferoni)

On considère le problème de test multiple :

$$\begin{cases} X : (\Omega, \mathcal{A}, \Pr) \longrightarrow (\mathcal{X}, x) \\ \mathbb{P}^X \in \mathcal{P} \\ \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \mathcal{H}^{0,j} : \mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^{0,j} \text{ où } \mathcal{P}^{0,j} \subset \mathcal{P} \end{cases}$$

Pour $j \in \{1, \dots, n\}$ $p_j(X)$ est une p-valeur.

Si $\mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^{0,j}$ alors $\forall t \in [0,1]$,

$$\Pr(p_j(X) \leq t) \leq t$$

Soit $\alpha \in]0;1[$, la procédure de Bonferroni qui rejette $\mathcal{H}^{0,j}$ lorsque $p_j(X) < \frac{\alpha}{n}$ contrôle le FWER au niveau α.

Preuve : Soit $\mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X)$ l'ensemble des hypothèses nulles vraies. On suppose que $\mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X) \neq \emptyset$ *

*Dans ce cas il n'y a pas de fausse positifs. (puisque être positif $\Rightarrow$ $\mathcal{H}^0$ vraie) donc FWER contrôlé

(FWER $= \Pr(|FP(X)| \geq 1) = 0$.)

L'inégalité de Bonferroni $\Pr(A \cup B) \leq \Pr(A) + \Pr(B)$ donne,

$$\begin{aligned} FWER &= \Pr(|FP(X)| \geq 1) \\ &= \Pr\Big(\bigcup_{j \in \mathcal{H}^0(\mathbb{P}(X))} \{ p_j(X) < \frac{\alpha}{n} \} \Big) \\ &\leq \sum_{j \in \mathcal{H}^0(\mathbb{P}(X))} \underbrace{\Pr\Big(p_j(X) < \frac{\alpha}{n} \Big)}_{\leq \frac{\alpha}{n}} \leq \underbrace{|\mathcal{H}^0(\mathbb{P}(X))|}_{\leq n} \times \frac{\alpha}{n} \end{aligned}$$

loi stochastiquement plus large que loi uniforme

Exercice : Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, I_5)$. Pour $i \in \{1 \dots 5\}$ on rejette $\mathcal{H}^{0,i} : \mu_i = 0$ en faveur de $\mathcal{H}^{1,i} : \mu_i \neq 0$ lorsque $p_i(X) < 0{,}01$.

1) Donner l'expression explicite de $p_i(X)$.
2) À quel niveau est contrôlé le FWER
3) On pose $\mu = (3; 0; 1; 0; 0)$
et $X^{exp} = (3{,}21; -1{,}32; 2{,}51; 2{,}71; -0{,}98)$

a) Calculer $p_1(X^{exp}), \dots, p_5(X^{exp})$
b) Donner $\mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X)$, $F\mathcal{N}(X^{exp})$, $V\mathcal{N}(X^{exp})$. $FP(X^{exp})$ et $VP(X^{exp})$.

Q° 1 : On rejette $\mathcal{H}^{0,i}$ lorsque $|X_i| > F_0^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ où F_0 est la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

$$p_i(X) = \inf\{ \alpha \in]0;1[; \; |X_i| > F_0^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \}$$

$$p_i(X) = \inf\{ \alpha \in]0;1[; \; F_0(|X_i|) > 1 - \frac{\alpha}{2} \}$$

$$p_i(X) = \inf\{ \alpha \in]0;1[; \; \alpha > 2(1 - F_0(|X_i|)) \}$$

Q° 2 : On a $\frac{\alpha}{n} = 0,01$ et $n = 5$
donc $\alpha = 0,05$.

Ainsi le FWER est contrôlé à 5 %.

Q° 3 : a)
$$\begin{aligned}
p_1(X^{exp}) &= 0,0013 \\
p_2(X^{exp}) &= 0,187 \\
p_3(X^{exp}) &= 0,1207 \\
p_4(X^{exp}) &= 0,0067 \\
p_5(X^{exp}) &= 0,3271
\end{aligned}$$

$=0$

b) $\mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X) = \{2,4,5\}$ (car $\mu = (3,0,1,0,0)$)

$$\begin{aligned}
TP(X^{exp}) &= \{ i \notin \mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X) : p_i(X^{exp}) < 0,01 \} \\
&= \{ 1,3 : p_i(X^{exp}) < 0,05 \} \\
&= \{1\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TN(X^{exp}) &= \{ i \in \mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X) : p_i(X^{exp}) \geq 0.01 \} \\
&= \{2,5\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
FP(X^{exp}) &= \{ i \in \mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X) : p_i(X^{exp}) < 0,01 \} \\
&= \{4\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
FN(X^{exp}) &= \{ i \notin \mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X) : p_i(X^{exp}) \geq 0.01 \} \\
&= \{3\}.
\end{aligned}$$

Proposition (procédure de Holm)

On considère le problème de test multiple suivant
$$\begin{cases}
X : (\Omega, \mathcal{A}, \Pr) \to (\mathcal{X}, \mathcal{x}) \\
\mathbb{P}^X \in \mathcal{P} \\
\forall j \in \{1,\dots,n\} \quad \mathcal{H}^{0,j} : \mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^{0,j} \subset \mathcal{P}
\end{cases}$$

Pour $j \in \{1,\dots,n\}$ $p_j(X)$ est une p-valeur.

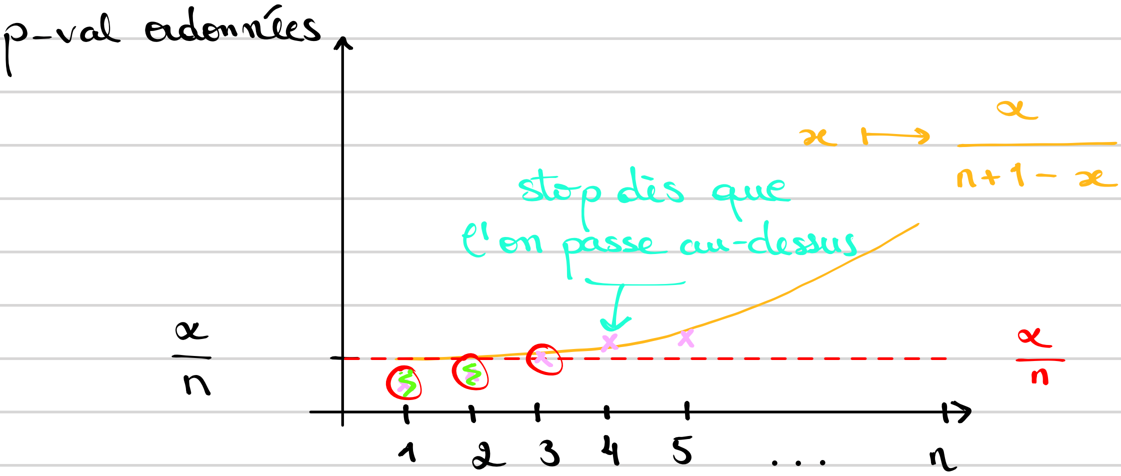
Si $\mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^{0,j}$ alors $\forall t \in [0;1]$ $\Pr(p_j(X) \leq t) \leq t$.

Soit π une permutation telle que $p_{\pi(1)}(X) \leq \ldots \leq p_{\pi(n)}(X)$ et $\alpha \in]0;1[$. La procédure de Holm rejetant $\mathcal{H}^{0,\pi(j)}$ lorsque,

$$\forall i \in \{1, \ldots, j\} \quad p_{\pi(i)}(X) < \frac{\alpha}{n+1-i}$$

contrôle le FWER au niveau α.

Illustration :



× : p-valeur (ordonnée)

⊗ : p-valeur où l'on rejette $\mathcal{H}^0$ selon Holm.

$: p-valeur " selon Bonferroni.

NB : Lorsqu'on rejette une hypothèse nulle toutes les précédentes sont rejetées aussi. Par exemple, ici p_4 est au-dessus de la courbe on ne peut pas la rejetter donc on ne rejette pas $\mathcal{H}^0$ pour p_5 non plus.

Preuve : On suppose que $\mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X) \neq \emptyset$

On pose $i_0 = \min\{i \in \{1, \ldots, n\} : \pi(i) \in \mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X)\}$

L'événement $|FP(X)| \geq 1$ happens ssi $\mathcal{H}^{0,\pi(i_0)}$ est rejetée.
En effet si $\mathcal{H}^{0,\pi(i_0)}$ est rejetée alors $\pi(i_0) \in FP(X)$.

Inversement si $\mathcal{H}^{0,\pi(i_0)}$ n'est pas rejetée alors par construction $\mathcal{H}^{0,\pi(i_0)}, \dots, \mathcal{H}^{0,\pi(n)}$ ne sont pas rejetées.

Comme $\mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X) \subset \{\pi(i_0), \dots, \pi(n)\}$ on en déduit que $FP(X) = \emptyset$.

Par conséquent le FWER est égal à la probabilité de rejet de $\mathcal{H}^{0,\pi(i_0)}$.

$$\Pr(|FP(X)| \geq 1) = \Pr\left(p_{\pi(1)}(X) < \alpha/n, \dots, p_{\pi(i_0)}(X) < \alpha/(n+1-i_0)\right)$$

$$\leq \Pr\left(p_{\pi(i_0)}(X) < \frac{\alpha}{(n+1-i_0)}\right)$$

$$\leq \Pr\left(p_{\pi_{i_0}}(X) < \frac{\alpha}{|\mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X)|}\right)$$

Enfin, comme $p_{\pi(i_0)}(X) = \min\{p_i(X) : i \in \mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X)\}$ on a,

$$FWER = \Pr(|FP(X)| \geq 1)$$

$$\leq \Pr\left(\min\{p_i(X) : i \in \mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X)\} < \frac{\alpha}{|\mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X)|}\right)$$

$$\leq \Pr\left(\bigcup_{i \in \mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X)} \left\{p_i(X) < \frac{\alpha}{|\mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X)|}\right\}\right)$$

$$\leq \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X)} \Pr\left(p_i(X) < \frac{\alpha}{|\mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X)|}\right)}_{\leq \frac{\alpha}{|\mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X)|}} \leq \alpha$$

Ainsi le FWER est contrôlée au niveau α.

Exercice :

On a $p_1(X^{exp}) = 0,0013$, $p_2(X^{exp}) = 0,1868$
$p_3(X^{exp}) = 0,012$ $\quad p_4(X^{exp}) = 0,0067$
$p_5(X^{exp}) = 0,327$

1) Quelles H_0 sont rejetées avec la procédure de Holm ?

On ordonne les p_valeurs : $(n=5,\ \alpha = 0{,}05)$

$p_{\pi(1)}(X^{exp}) = 0,0013 < \alpha/n = 0,01$ ✓ H_1
$p_{\pi(2)}(X^{exp}) = 0,0067 < \alpha/(n-1) = 0,0125$ ✓ H_1
$p_{\pi(3)}(X^{exp}) = 0,012 < \alpha/(n-2) = 0,0167$ ✓ H_1
$p_{\pi(4)}(X^{exp}) = 0,1868 > \alpha/(n-3) = 0,1$ × H_0

On rejette donc les hypothèses nulles associées à p_1, p_4 et p_3 i.e. $H^{0,1}$, $H^{0,4}$ et $H^{0,3}$.

Avec la procédure de Bonferoni on ne rejette que les H_0 associées à p_1 et p_4. (plus petite que $\frac{\alpha}{n} = 0{,}01$)

Proposition : La procédure de Holm est plus puissante que la procédure de Bonferoni :

$$\underbrace{p_{\pi(j)}(X) < \frac{\alpha}{n}}_{\text{Bonferoni rejette } H^{0,\pi(j)}} \Rightarrow \underbrace{\forall i \in \{1,\dots,j\}\ p_{\pi(i)} < \frac{\alpha}{n+1-i}}_{\text{Holm rejette } H^{0,\pi(j)} \text{ et toutes celles avant.}}$$

Preuve :

$$\forall i \in \{1,\dots,j\} \quad p_{\pi(i)}(X) \leqslant p_{\pi(j)}(X) < \frac{\alpha}{n} \leqslant \frac{\alpha}{n+1-i} \qquad \square$$

Procédures contrôlant le taux de faux positifs

Définition : • La proportion de faux positifs (FDP) "False Discovery Proportion" est définie par,

$$FDP(X) : \frac{|FP(X)|}{\max\{|R(X)|, 1\}}$$

cardinal de l'ens. $FP(X)$.

où $R(X) = FP(X) \cup VP(X)$

• Le taux de faux positifs (FDR) "False Discovery Rate" est $\mathbb{E}[FDP(X)]$.

Proposition : (FDR et FWER)

i) Le FDR est plus petit que le FWER.

ii) Lorsque les hypothèses nulles sont toutes vraies (i.e. $\mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X) = \{1, \dots, n\}$) alors FDR = FWER.

Preuve :

i) Puisque, $FDP(X) = \dfrac{|FP(X)|}{\max\{|FP(X)| + |VP(X)|, 1\}}$

Alors, $FDP(X) \leq \mathbb{1}(|FP(X)| \geq 1)$

et, $$FDR = \mathbb{E}(FDP(X)) \leq \mathbb{E}(|FP(X)| \geq 1)$$
$$= \mathbb{P}(|FP(X)| \geq 1)$$
$$= FWER$$

ii) Lorsque les hypothèses nulles sont toutes vraies alors,

$$VP(X) = \emptyset \Rightarrow FDP(X) = \frac{|FP(X)|}{\max\{|FP(X)|, 1\}}$$

$$= \mathbb{1}\{|FP(X)| \geq 1\}$$

D'où,

$$FDR = \mathbb{E}(FDP(X)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}\{|FP(X)| \geq 1\})$$

$$= \mathbb{P}(|FP(X)| \geq 1)$$

$$= FWER.$$

$\square$.

Proposition : (procédure de Benjamini Hochberg)

On considère le problème de tests multiples

$$\begin{cases} X : (\Omega, \mathcal{A}, P_r) \longrightarrow (\mathcal{X}, x) \\ \mathbb{P}^X \in \mathcal{P} \\ \text{Pour tout } j \in \{1, \dots, n\} \; \mathcal{H}^{0,j} : \mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^{0,j} \text{ où } \mathcal{P}^{0,j} \subset \mathcal{P} \end{cases}$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ $p_j(X)$ est une p-valeur :

Si $\mathbb{P}^X \in \mathcal{P}^{0,j}$ alors $\forall t \in [0;1]$ $P_r(p_j(X) \leq t) \leq t$

Soit π une permutation telle que :

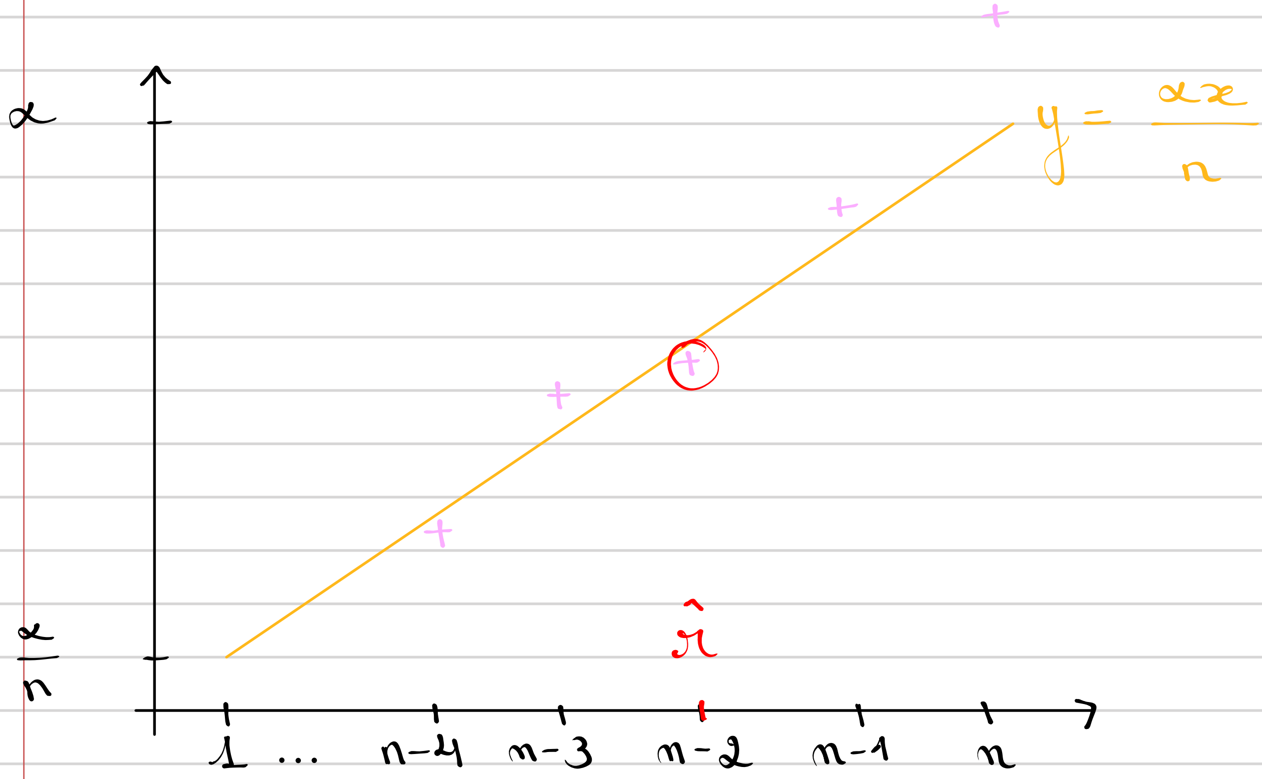
$$p_{\pi(1)}(X) \leq \dots \leq p_{\pi(n)}(X) \quad \text{et} \quad \alpha \in]0;1[.$$

La procédure de Benjamini-Hochberg rejette $\mathcal{H}^{0,\pi(j)}$ lorsque $\exists i \geq j$, $p_{\pi(i)}(X) < \frac{\alpha \cdot i}{n}$

i) La procédure de BH contrôle le FDR au niveau $\alpha(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n})$ $(\sim \alpha \log(n))$.

ii) Si les p-valeurs sont indépendantes, la procédure de BH contrôle le FDR au niveau α. (Benjamini Hochberg (1995)).

Illustration :



Les hypothèses nulles associées aux $\hat{r}$ plus petites valeurs sont rejetées par la procédures BH.

Preuve :

On pose $\hat{r} = \begin{cases} \max\left\{ r \in \{1, \dots, n\},\ p_{\pi(r)} < \frac{\alpha r}{n} \right\} \\ 0 \quad \text{si le max mal définit} \end{cases}$

La procédure de Ben-Hoch rejette les hypothèses nulles de r plus petites p-valeurs ! De plus $H_{0,i}$ est rejetée si et seulement si $p_i(X) < \frac{\alpha \hat{r}}{n}$, pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

On a,

$$FDR = \mathbb{E}\left(\frac{1}{\max\{\hat{r},1\}} \overbrace{\sum_{i \in \mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X)} \mathbb{1}\left(p_i(X) < \frac{\alpha \hat{r}}{n}\right)}^{\text{nombre de faux positifs}} \right)$$

Sachant que,

$$\frac{1}{\ell} = \left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell+1}\right) + \left(\frac{1}{\ell+1} - \frac{1}{\ell+2}\right) + \dots$$

$$= \sum_{k \geq \ell} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k \geq \ell} \frac{1}{k(k+1)}.$$

On a donc,

$$FDR = \mathbb{E}\left[\sum_{i \in \mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X)} \overbrace{\sum_{k \geq \max\{\hat{r},1\}} \frac{1}{k(k+1)}}^{= \frac{1}{\max(\hat{r},1)}} \mathbb{1}\left\{p_i(X) < \frac{\alpha \hat{r}}{n}\right\} \right]$$

$$\leq \mathbb{E}\left[\sum_{i \in \mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X)} \sum_{k \geq \max\{\hat{r},1\}} \frac{1}{k(k+1)} \mathbb{1}\left\{p_i(X) < \frac{\alpha \min(k,n)}{n}\right\} \right]$$

$$\leq \sum_{i \in \mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X)} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)} \underbrace{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}\left\{p_i(X) < \frac{\alpha \min(k,n)}{n}\right\}\right]}_{\leq \frac{\alpha \min(k,n)}{n}}$$

stochastiquement plus large qu'une loi uniforme

car $i \in \mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X)$

$$\leq \frac{\alpha |\mathcal{H}^0(\mathbb{P}^X)|}{n} \sum_{k \geq 1} \frac{\min\{k,n\}}{k(k+1)}$$

$$\leq \alpha \times \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)} + n \sum_{k \geq n} \frac{1}{k(k+1)} \right)$$

$$= \alpha \times \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + 1 \right) \qquad \square$$