Chapitre 2 : Identifiabilité et courbes de transition

$$\boxed{\begin{matrix} b \in \mathbb{R}^n \\ b = Ax \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} A \in \mathbb{R}^{n\times p} \\ n < p \end{matrix}} \; \boxed{x^* \in \mathbb{R}^p}$$

b connu A connu x^* inconnu

Q : Connaissant A et b peut on recouvrir x^* ?

→ Compressed sensing (wiki)

Définition : (Identifiabilité)

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$ et $x^* \in \mathbb{R}^p$. Le vecteur x^* est identifiable relativement à A et à la norme ℓ_1 si pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ tq $Ax = Ax^*$ on a $\|x^*\|_1 \leq \|x\|_1$

Exemple : $x^* = 0$ est identifiable relativement à A et à la norme 1.

Proposition :

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$ et $x^* \in \mathbb{R}^p$, les assertions suivantes sont équivalentes :

i) x^* est identifiable relativement à A et à la norme ℓ_1.

ii) $\forall h \in \operatorname{Ker} A \quad \left| \sum_{i \in \operatorname{supp}(x^*)} \operatorname{sign}(x_i^*) h_i \right| \leq \sum_{i \notin \operatorname{supp}(x^*)} |h_i|$

iii) $\exists z \in \mathbb{R}^n$ tel que $\begin{cases} \|{}^tAz\|_\infty \leq 1 \\ \forall i \in \mathrm{Supp}(x^*) \quad {}^tA_i z = \mathrm{sgn}(x_i^*) \end{cases}$

iv) $x^* = 0$ ou $v = \dfrac{1}{\|x^*\|_1} Ax^*$ vérifie $N_A(v) = 1$.

Corollaire : Soit $A = (A_1 | \dots | A_p)$ et $x^* \in \mathbb{R}^p$ alors,

i) Le vecteur $-x^*$ est identifiable ssi x^* l'est.

ii) Soit $\tilde{x} \in \mathbb{R}^p$ tq $\mathrm{sgn}(\tilde{x}) = \mathrm{sgn}(x^*)$. Le vecteur $\tilde{x}$ est identifiable ssi le vecteur x^* l'est.

iii) $x^* \neq 0$ est identifiable ssi l'isobarycentre u de la famille $\{\mathrm{sign}(x_j^*) A_j\}_{j \in \mathrm{supp}(x^*)}$ satisfait $N_A(u) = 1$.

Justification : i) $Ax = A(-x^*)$ sup. $\|x\|_1 \geq \|x^*\|_1$

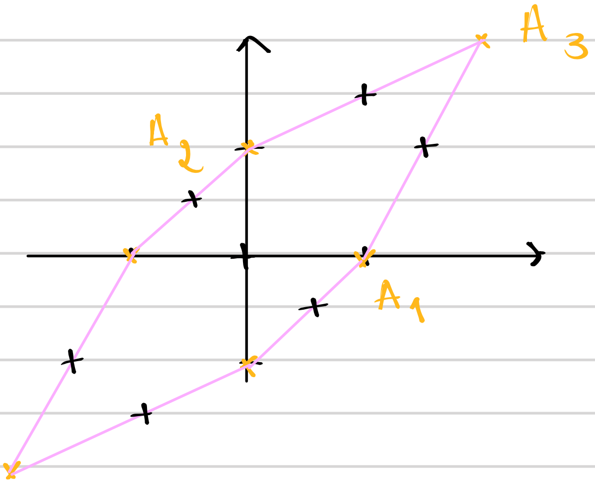
$A(-x) = Ax^*$ $\|-x\|_1 = \|x\|_1 \geq \|x^*\|_1$

ii) Condition ii) de la prop précédente $\tilde{x}$ et x^* ont le même supp et sign.

iii) Condition iii) de la prp. préc. isobary $\rightarrow \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



Si $\mathrm{sgn}(x^*) = (1, 0, 1)$ (ie $x_1 > 0$, $x_2 = 0$, $x_3 > 0$) alors x^* est identifiable car $u = \dfrac{A_1 + A_3}{2} \Rightarrow N_A(u) = 1$

De la même façon, $x^* \in \mathbb{R}^3$ est identifiable ssi $\mathrm{sign}(x^*) \in \{(0,0,0), \pm(1,0,0), \pm(0,1,0), \pm(0,0,1)$
$\pm(1,0,1), \pm(1,-1,0), \pm(0,1,1)\}$

vecteur nul
6 sommets
6 arêtes

↳ En dehors x^* n'est pas identifiable
par ex : $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ et $x_3 = 0$
n'est pas identifiable

Exercice : Soit $\tau \geq 0$ et $v \in \mathbb{R}^p$. On définit
$v_i^\tau = v_i \mathbb{1}(|v_i| > \tau)$.

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ et $x \in \mathbb{R}^p$ identifiable. Montrer que x^τ est identifiable.

$$x_i^\tau = x_i \mathbb{1}(|x_i| > \tau)$$ "vecteur seuillé"

On remarque que,

$$\|x^\tau\|_0 \leq \|x\|_0 \qquad \Big| \quad i \in \mathrm{Supp}(x^\tau)$$
$$\mathrm{supp}(x^\tau) \subseteq \mathrm{supp}(x) \qquad \Big| \quad \mathrm{sign}(x_i^\tau) = \mathrm{sign}(x_i)$$

x est identifiable donc,

$$\exists z \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \begin{cases} \|{}^tAz\|_\infty \leq 1 \\ \forall i \in \mathrm{Supp}(x) \quad {}^tA_i z = \mathrm{sgn}(x_i) \end{cases}$$

Comme $\mathrm{supp}(x) = \{ i : x_i \neq 0 \text{ et } |x_i| > \tau \}$
$\cup \{ i : x_i \neq 0 \text{ et } |x_i| \leq \tau \}$

On a $\mathrm{supp}(x^\tau) \subset \mathrm{Supp}(x)$. De plus, si $x_i^\tau > 0$ alors $x_i > 0$ et si $x_i^\tau < 0$ alors $x_i < 0$.

Ainsi $\forall i \in \mathrm{Supp}(x^\tau)$, ${}^tA_i z = \mathrm{sign}(x_i) = \mathrm{sign}(x_i^\tau)$
donc, $\|{}^tAz\|_\infty \leq 1$ et $i \in \mathrm{Supp}(x^\tau)$ ${}^tA_i z = \mathrm{sign}(x_i^\tau)$

D'où x^τ identifiable.

V - Identifiabilité relativement à une matrice gaussienne

Proposition : Soit $Z \in \mathbb{R}^{n\times p}$ une matrice aléatoire dont les coeff. sont i.i.d $\mathcal{N}(0,1)$, $x^* \in \mathbb{R}^p$
$k = \|x^*\|_0$.

La probabilité que x^* soit identifiable relativ^t à Z et à la norme ℓ_1 est,

$Z \sim$ loi de $(\pm Z_1 | \dots | \pm Z_p)$
$Z = (Z_1 | \dots | Z_p)$

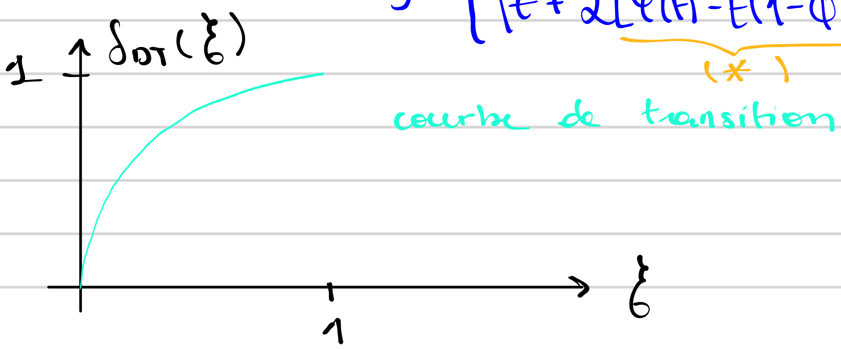
$$\mathbb{P}_Z\left(N_Z\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Z_i\right) = 1\right)$$
$$= \mathbb{P}_Z\left(\operatorname{im}({}^tZ) \text{ coupe } \{1\}^k \times [-1;1]^{p-k}\right)$$
$$= \mathbb{P}_Z\left(\forall h \in \operatorname{Ker}(Z) \quad \left|\sum_{i=1}^{k} h_i\right| \leq \sum_{i=k+1}^{p} |h_i|\right)$$

On note $u_{k,n,p}$ cette probabilité.

Définition : (courbe de transition)

Soit φ la densité d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et Φ la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$.
La courbe de transition de Donoho Tanner est définie paramétriquement par,

$$\left\{\xi, (\delta_{DT}(\xi)), \xi \in [0;1]\right\} = \left\{\left(\frac{2[\varphi(t) - t(1-\Phi(t))]}{t + \underbrace{2[\varphi(t) - t(1-\Phi(t))]}_{(*)}} ; \frac{2\varphi(t)}{t + 2(*)}\right), t \in]0;+\infty[\right\}$$



Théorème : (Courbe de transition D.T 2009)

Soit $(k_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(n_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ des suites d'entiers telles que :

$$\lim_{p\to\infty} \frac{k_p}{p} = \xi \in]0;1[$$

et

$$\lim_{p\to\infty} \frac{n_p}{p} = \delta \in]0;1[$$

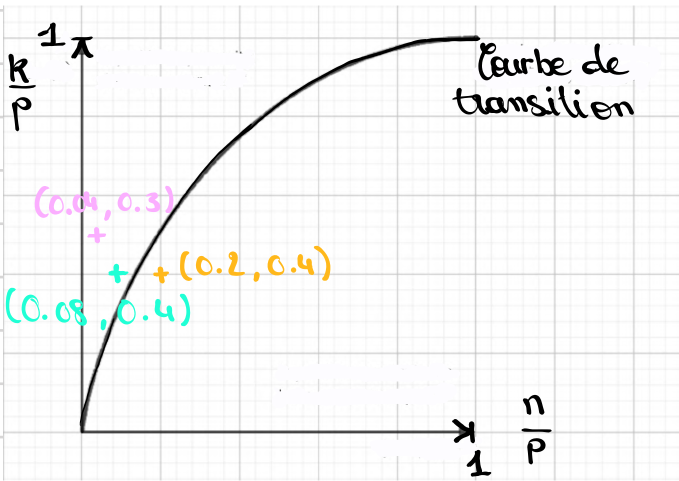
alors,

$$\lim_{p\to\infty} u_{k,n,p} = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta > \delta_{DT}(\xi) \\ 0 & \text{si } \delta < \delta_{DT}(\xi) \end{cases}$$

Exemple : Soit $Z \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $x^* \in \mathbb{R}^p$, $k = \|x^*\|_0$

On pose $k = 400$, $n = 3000$ et $p = 10\,000$

Comme le point $\left(\frac{k}{p};\frac{n}{p}\right) = (0{,}04,\ 0{,}3)$ est au-dessus de la courbe de transition alors la probabilité que x^* soit identifiable relativement à Z et à la norme ℓ_1 est approximativement 1. D'où $u_{k,n,p} \approx 1$.



Exercice :

1) $k = 100$, $n = 200$, $p = 500 \Rightarrow u_{k,n,p} \simeq 0$

2) $k = 800$, $n = 4000$, $p = 10000 \Rightarrow u_{k,n,p} \approx 1$