Chapitre 1 : Solutions parcimonieuses d'un système linéaire d'équations méthode poursuite de base

Définition : (solution parcimonieuse)

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$ et $b \in Im(A)$. Une solution parcimonieuse du système $Ax = b$ est une solution dont le nombre de composantes non-nulles est inférieur à $rg(A)$.

Définition : (solutions les plus parcimonieuses)

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$ et $b \in Im(A)$. L'ensemble des sol^{ons} les plus parcimonieuses du système $Ax = b$ noté $S_{A,parc}(b)$ est,

$$S_{A,parc}(b) := \underset{x \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} \|x\|_0 \quad , \quad Ax = b$$

où $\|x\|_0 = |\{i \in \{1 \dots p\} : x_i \neq \}|$ est la "norme" ℓ_0.

Résolution Combinatoire :

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$ et $b \in ImA$, on suppose que $p \geq n$ et que toute sous matrice carrée $n\times n$ de A est inversible.

Pour chaque sous-matrice $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de A, on calcule $\tilde{A}^{-1} b$. fournit une solution de a

Parmis ces vecteurs, ceux ayant une "norme" ℓ_0 minimale fournissent les solutions les plus parcimonieuses du système $Ax = b$.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Soit $x = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ une solution du système $Ax = b$.

* Si $x_1 = 0$ alors $\begin{cases} x_4 = 2 \\ x_2 + x_4 = 3 \\ x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{matrix}$

revient à supprimer la 1ère colonne.

$\Rightarrow$ Dans ce cas la solution parcimonieuse est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

* Si $x_2 = 0$

↪ on retire la deuxième colonne

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors, $\begin{cases} x_1 + x_4 = 2 \\ x_4 = 3 \\ x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 3 \end{cases}$

La solution parcimonieuse est ${}^t(-1, 0, -1, 3)$

* Si $x_3 = 0$ $\Rightarrow$ la solution ${}^t(0, 1, 0, 2)$

* Si $x_4 = 0$ $\Rightarrow$ " ${}^t(2, 3, 2, 0)$

Conclusion : La solution la plus parcimonieuse est $x = {}^t(0, 1, 0, 2)$

I - Minimisation de la norme ℓ_1 : poursuite de base

Définition : (solution basis Pursuit)

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ et $b \in \mathrm{Im}(A)$. L'ensemble des solutions poursuite de base du système $Ax = b$, noté $S_{A,pb}(b)$ est,

$$S_{A,pb}(b) := \underset{x \in \mathbb{R}^p}{\mathrm{argmin}} \; \|x\|_1 \quad , \quad Ax = b$$

où $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_i|$.

Proposition : (poursuite de base et programmation)

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $b \in \mathrm{Im}(A)$. Soit $(u^*, v^*) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ solution du problème de programmation linéaire :

$$(*) \qquad \boxed{(u^*, v^*) = \underset{u \in \mathbb{R}^p, v \in \mathbb{R}^p}{\mathrm{argmin}} \left(\sum_{i=1}^{p} u_i + \sum_{i=1}^{p} v_i \right) , \quad \begin{array}{l} A(u - v) = b \\ u \geq 0 \\ v \geq 0 \end{array}}$$

alors $x = (u^*, v^*)$ est une solution poursuite de base.

Réciproquement, soit $x^* \in S_{A,pb}(b)$ on pose

$$\begin{cases} u^* = \left(x_i^* \, \mathbb{1}(x_i^* > 0) \right)_{1 \leq i \leq p} \\ v^* = \left(-x_i^* \, \mathbb{1}(x_i^* < 0) \right)_{1 \leq i \leq p} \end{cases}$$

alors (u^*, v^*) est solution du problème $(*)$

u représente les composantes positives

v représente les comp. négatives.

Proposition : (solu° parcimonieuse PB)

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ et $b \in \mathrm{Im}(A)$, alors :

↗ souvent un singleton

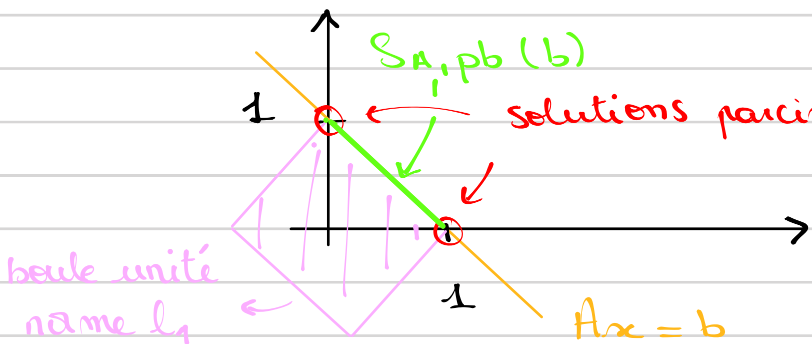
i) L'ensemble $S_{A,pb}(b)$ est non-vide.

ii) $\exists x^* \in S_{A,pb}(b)$, $\|x^*\|_0 \leq rg(A)$

Exemple : $A = (1, 1)$ et $b = 1$, alors

↳ exemple où $S_{A,pb}(b)$ n'est pas un singleton.

On a $S_{A,pb}(b) = \{ {}^t(\alpha, 1-\alpha) : \alpha \in [0;1] \}$



Les solutions parcimonieuses du problème PB sont $(1,0)$ et $(0,1)$.

II - Caractérisation des solutions poursuite de base

Proposition : (propriété du noyau Gribonval Nielsen 2003, Elad & Bruckstein 2002, Donoho Elad 2003)

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ et $b \in \mathrm{Im}(A)$, x^* est solution de $Ax = b$ alors :

i) Si $\forall h \in \mathrm{Ker}(A)$, $\sum_{i \in Supp(x^*)} |h_i| \leq \sum_{i \notin Supp(x^*)} |h_i|$

↳ $\{ i \in \{1 \dots n\} : x_i^* \neq 0 \}$

alors, x^* est une solution poursuite de base.

ii) Si $h \in Ker(A)$, $h \neq 0$, $\sum_{i \in Supp(x^*)} |h_i| < \sum_{i \notin supp(x^*)} |h_i|$

alors x^* est l'unique solution de PB.

Preuve :

i) Soit x^* solution de $Ax = b$, posons $\tilde{x} = x^* + h$ où $h \in Ker(A)$ alors,

$$\underbrace{\|\tilde{x}\|_1 - \|x^*\|_1}_{} = \sum_{i=1}^{p} |x_i^* + h_i| - \sum_{i=1}^{p} |x_i^*|$$

le but est de montrer que cette différence est positive.

$$= \sum_{i \in supp(x^*)} |x_i^* + h_i| + \sum_{i \notin supp(x^*)} |h_i| - \sum_{i \in supp(x^*)} |x_i^*|$$

$$= \sum_{i \in S(x^*)} \left(|x_i^* + h_i| - |x_i^*|\right) + \sum_{i \notin S(x^*)} |h_i|$$

$|x_i^* + h_i| \geq |x_i^*| - |h_i|$

$$\geq -\sum_{i \in S(x^*)} |h_i| + \sum_{i \notin S(x^*)} |h_i|$$

car i) suppose $\sum_{i \in Supp(x^*)} |h_i| < \sum_{i \notin Supp(x^*)} |h_i|$

$$\geq 0$$

Ainsi, $\|\tilde{x}\|_1 \geq \|x^*\|_1$ donc $x^* \in S_{A,pb}(b)$

Proposition : (carac des solutions PB)

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ et $b \in Im(A)$, x^* une solu° de $Ax = b$.

i) $x^* \in S_{A,pb}(b)$ si et seulement si $\forall h \in Ker(A)$

$$\left|\sum_{i \in supp(x^*)} sign(x_i^*) h_i\right| \leq \sum_{i \notin supp(x^*)} |h_i|$$

ii) $S_{A,pb}(b) = \{x^*\}$ si et seulement si $\forall h \in \mathrm{Ker}(A) \setminus \{0\}$

$$\left|\sum_{i \in \mathrm{Supp}(x^*)} \mathrm{sign}(x_i^*) h_i\right| < \sum_{i \notin \mathrm{Supp}(x^*)} |h_i| .$$

Exemple :

petit exemple où la solu° la + parcimonieuse et la solution PB coïncident.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On rappelle que la solution de $Ax = b$ est $x^* = {}^t(0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 2)$

Soit $h = {}^t(1, 1, 1, -1) \in \mathrm{Ker}(A)$.

On a, $\displaystyle\sum_{i \notin \mathrm{supp}(x^*)} |h_i| = |h_1| + |h_3| = 2$ $\longrightarrow \ne 0$

et $\displaystyle\left|\sum_{i \in \mathrm{supp}(x^*)} \mathrm{sign}(x_i^*) h_i\right| = |h_2 + h_4| = 0$ $\longrightarrow \ne 0$

Puisque $\displaystyle\left|\sum_{i \in \mathrm{supp}(x^*)} \mathrm{sign}(x_i^*) h_i\right| < \sum_{i \notin \mathrm{supp}(x^*)} |h_i|$ $(*)$

on peut déduire que c'est une solution poursuite de base.

Or puisque le noyau de A est réduit à un seul élément et que l'inégalité est stricte on vérifie bien l'inégalité $(*)$ $\forall h \in \mathrm{Ker}(A) / \{0\}$.

Donc $S_{A,pb}(b) = \{x^*\}$, ie x^* est l'unique solution PB.

III - Caractérisation géométrique des solutions du problème poursuite de base

Lemme : (Donoho 2005)

Soit $A = (A_1 | \dots | A_p) \in \mathbb{R}^{n \times p}$, et $\forall b \in Im(A)$
on pose,

$$N_A(b) = \min \{ \|x\|_1 : Ax = b \}$$

↳ norme ℓ_1 de la solu° PB

alors N_A est une norme sur $Im(A)$ dont la boule unité est $conv\{\pm A_1, \dots, \pm A_p\}$.

↳ petit convexe contenant le nuage de pts $A_1 \dots A_p$

↳ preuve (N_A est une norme)

• N_A est définie positive : $N_A(0) = 0$

↳ $Ax = 0 \Rightarrow x = 0_{\mathbb{R}^p}$

Réciproquement, si $N_A(b) = 0$
alors $x = 0_{\mathbb{R}^p}$ solution de $Ax = b$
$\Rightarrow b = 0$

• N_A est homogène : Si $\lambda = 0$ alors $N_A(\lambda b) = 0$
$= |\lambda| N_A(b)$

Supposons que $\lambda \neq 0$.

Soit x_b une solution PB de $Ax = b$ $\Rightarrow N_A(b) = \|x_b\|_1$
alors λx_b est solu° de $Ax = \lambda b$.

D'où, $N_A(\lambda b) \leq \|\lambda x_b\|_1 = |\lambda| N_A(b)$

Inversement, si $x_{\lambda b}$ est une solution PB de $Ax = \lambda b$
alors $\frac{x_{\lambda b}}{\lambda}$ est solution de $Ax = b$.

D'où, $N_A(b) \leq \left\| \frac{x_{\lambda b}}{\lambda} \right\|_1$ donc $|\lambda| N_A(b) \leq N_A(\lambda b)$

Ainsi pour tout $b \in Im A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $N_A(\lambda b) = |\lambda| N_A(b)$

• N_A satisfait l'inegalité triangulaire :

Soit x_b et $x_{b'}$ deux solutions poursuites de base de $Ax = b$ et $Ax = b'$.

$\hookrightarrow N_A(b) = \|x_b\|_1$ et $N_A(b') = \|x_{b'}\|_1$

alors $x_b + x_{b'}$ est solution de $Ax = b + b'$

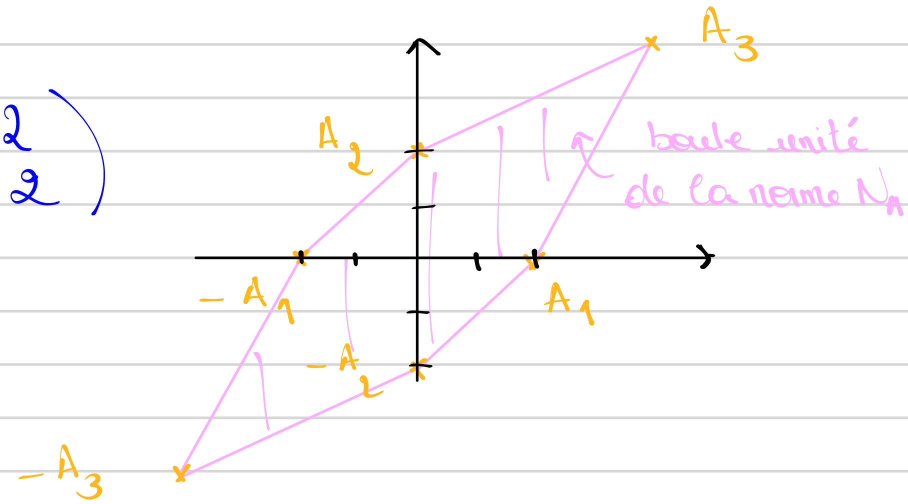
D'où, $N_A(b+b') \leq \|x_b + x_{b'}\|_1$

$\leq \|x_b\|_1 + \|x_{b'}\|_1$

$= N_A(b) + N_A(b')$. $\square$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



Proposition : (carac géométrique des solutions PB)

Soit $A = (A_1 | \dots | A_p) \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $b \in \mathrm{Im}(A)$ et x^* une solution de $Ax = b$, les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $x^* \in S_{A,pb}(b)$

ii) $\exists z \in \mathbb{R}^n$ tq. $\begin{cases} \|{}^tAz\|_\infty \leq 1 \\ \forall i \in \mathrm{Supp}(x^*)\ {}^tA_i z = \mathrm{sign}(x_i^*) \end{cases}$

iii) $x^* = 0$ ou $v = \frac{1}{\|x^*\|_1} b$ $(\Rightarrow N_A(v) \leq 1)$) satisfait $N_A(v) = 1$!

$\hookrightarrow = \frac{1}{\|x^*\|_1} N_A(b) \leq 1$ ← I.T.

Exercice :

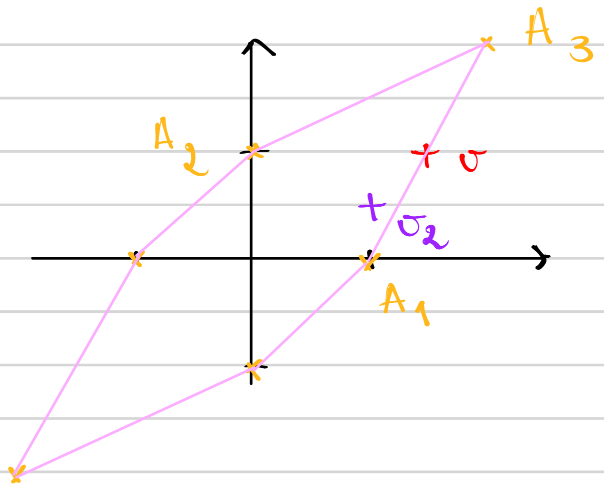
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

• Est ce que $x^* = {}^t(1\ 0\ 1)$ est solution parfaite de base de $Ax = b$?

$$Ax^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

x^* est solution du système $Ax = b$.

On pose $v = \frac{1}{\|x^*\|_1} b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$



Puisque v est placé sur le bord de la boule unité de la norme N_A on a $N_A(v) = 1$.

(Exercice Bonus : Faire la méthode analytique)

• Même question pour $b = {}^t(2\ 1)$ et $x = {}^t(0\ {-1}\ 1)$

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$v_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

v_2 n'est pas sur le bord $\Rightarrow x^* \notin S_{A,pb}(b)$

IV - Condition nécessaire et suffisante à l'unicité du problème poursuite de base.

Proposition: (unicité Ewald et Schneider 2020) :

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Il existe $b \in Im(A)$ pour lequel $S_{A,pb}(b)$ n'est pas un singleton ssi $Im(^tA)$ coupe une face de $[-1;1]^p$ dont la dimension est strictement inférieure à $\dim(Ker(A))$

↳ ev engendré par les lignes de A

Remarque: Une face F du cube $[-1,1]^p$ s'écrit sous la forme $F = E_1 \times \dots \times E_p$ où $E_i = \{\{1\}, \{-1\}, [-1,1]\}$

→ La dimension de F est le nombre de segment $[-1;1]$ dans la décomposition précédente.

Exemples: * Si $A = (1 \ \ 1)$ alors $Im(^tA)$ coupe le sommet $^t(1 \ \ 1)$ du carré $[-1,1]^2$ la dimension d'un sommet est nulle ↳ $\Rightarrow < \dim(Ker(A)) = 1$.
Ainsi $\exists b \in \mathbb{R}$ t.q $S_{A,pb}(b)$ n'est pas un singleton.

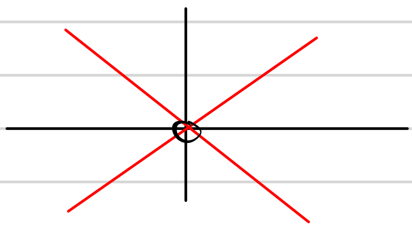
* Si $A \in \{1,1\}^{n \times p}$ avec $p > n$ alors chaque ligne de A est un sommet de $[-1,1]^p$. La dimension d'un sommet étant strictement inférieure à $\dim(Ker(A))$ $\exists b \in \mathbb{R}$ t.q $S_{A,pb}(b)$ pas un singleton.

* Le jeu de données "ojsette" fournit $A \in \mathbb{R}^{5000 \times 6000}$ et $b \in \mathbb{R}^{5000}$ pour lesquels $S_{A,pb}(b)$ pas singleton

Proposition : (unicité géométrique)

L'ensemble $\{A \in \mathbb{R}^{n\times p} : \exists b \in \mathbb{R}^n \text{ avec } |S_{A,pb}(b)| > 1\}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{n\times p}$

Exemples : $\{A \in \mathbb{R}^{1\times 2} : \exists b \in \mathbb{R},\ |S_{A,pb}(b)| > 1\}$
$= \{A = (a_{11}, a_{12}) : |a_{11}| = |a_{12}| \neq 0\}$



Exercice : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Montrer que $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{-1, 1\}$ on a,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & \varepsilon_1 \\ 1 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 1 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$= \underbrace{-2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3}_{-2(\underbrace{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}_{\begin{cases} -2 & \text{si } \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1 \\ 0 & \text{si } \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 \\ 2 & \text{si } \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1 \end{cases}})} + \varepsilon_1$$

Donc on a,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & \varepsilon_1 \\ 1 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 1 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} = \begin{cases} -4 + \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 \\ 4 + \varepsilon_1 \end{cases} \neq 0 \quad \forall \varepsilon_1 \in \{-1, 1\}$$

- On peut en déduire que comme $\mathrm{Im}({}^tA)$ ne coupe pas un sommet ${}^t(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ du cube $[-1;1]^3$. Donc, $\mathrm{Im}({}^tA)$ ne coupe une face de $[-1,1]^3$ dont la dim est strictement inférieure à $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$.

Ainsi $\forall b \in \mathbb{R}$, $S_{A,pb}(b)$ est un singleton.

IV - Conditions garantissant qu'une solution est la plus parcimonieuse

Définition: (Germe d'une matrice)

non-réduit à $\{0\}$

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ telle que $\{0\} \subsetneq \mathrm{Ker}(A)$.
La germe de A est,

nb minimal de composantes non-nulles

$$\mathrm{germe}(A) = \min\{\|h\|_0,\ h \in \mathrm{Ker}(A) \setminus \{0\}\}$$

Remarques:

* Par construction $\mathrm{germe}(A) \geq 1$, de plus $\mathrm{germe}(A) \leq n+1$
* $\mathrm{germe}(A) = 1$ si et seulement si A possède une colonne nulle

$Ah = 0 \Leftrightarrow A_1 h_1 = 0$

$h = {}^t(1\ 0 \_ 0)$ $\Rightarrow A_1 = {}^t(0 - 0)$

* $\mathrm{germe}(A) = 2$ ssi A possède 2 colonnes (non-nulles) colinéaires.

$\hookrightarrow Ah = h$ $\quad h = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\alpha A_1 - A_2 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha A_1 = A_2$

Proposition : (Condition sur le germe)

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $b \in \mathrm{Im}\, A$ et x^* solution de $Ax = b$:

i) $\|x^*\|_0 \leq \dfrac{\mathrm{germe}(A)}{2}$ alors $x^* \in S_{A,parc}(b)$

ii) $\|x^*\|_0 < \dfrac{\mathrm{germe}(A)}{2}$ alors $S_{A,parc}(b) = \{x^*\}$.

↳ preuve :

i) Si $x^* \notin S_{A,parc}(b)$ alors il existe $\tilde{x}$ tq $\|\tilde{x}\|_0 < \|x^*\|_0$. On pose $h = x^* - \tilde{x}$, $h \in \mathrm{Ker}(A) \setminus \{0\}$ et $\mathrm{supp}(h) \subset \mathrm{supp}(x^*) \cup \mathrm{supp}(\tilde{x})$

Ainsi, $\|h\|_0 = |\mathrm{supp}(h)| \leq |\mathrm{supp}(x^*)| + |\mathrm{supp}(\tilde{x})|$

$\|\tilde{x}\|_0 < \|x^*\|_0$

donc $\|\tilde{x}\|_0 < 2\|x^*\|_0$ $< \mathrm{germe}(A)$

Ce qui contredit la définition de germe (A)
(cela signifierait qu'on a trouvé un plus petit h que celui de germe (A) alors que germe (A) est le plus petit).

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $A \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$
On définit,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{n \times (n+1)}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_n, \quad k < \frac{n+1}{2}$$

Déterminons $S_{A,parc}(b)$.

On a $\ker(A) = \mathrm{vect}\{{}^t(1, \ldots, 1, -1)\}$
donc $\mathrm{germe}(A) = n+1$

$$x_i + x_{n+1} = \begin{cases} b_i & i \leq k \\ 0 & i > k \end{cases}$$

$\hookrightarrow x^* = b$ est une solution de $Ax = b$.
et $\|x^*\|_0 = k < \frac{n+1}{2} = \frac{\text{germe}(A)}{2}$

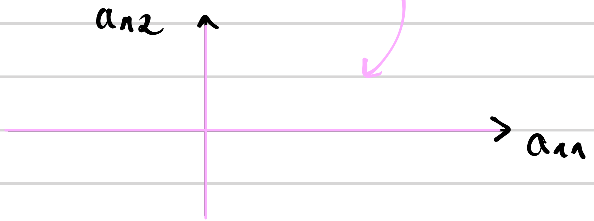
Ainsi x^* est la solution la plus parcimonieuse et $S_{A,parc} = \{x^*\} = \{b\}$.

Proposition :

L'ensemble $\{A \in \mathbb{R}^{n\times p} : \exists h \in Ker(A)/\{0\}, \|h\|_0 \leq \min\{n,p\}\}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{n\times p}$.

Exemple : Si $n = 1$ et $p = 2$, alors

$$\{A \in \mathbb{R}^{1\times 2} : \exists h \in Ker(A)/\{0\}, \|h\|_0 \leq 1\}$$
$$= \{A = (a_{11} \ a_{12}) : a_{11} = 0 \text{ ou } a_{12} = 0\}$$



V - Condition garantissant qu'une solution est simultanément la plus parcimonieuse et la solution PB

Définition : (Cohérence mutuelle)

Soit $A = (A_1 | \dots | A_p)_{n\times p}$. La cohérence mutuelle $\mathcal{M}(A)$ est,

max scalaire entre 2 colonnes.

$$\boxed{\mathcal{M}(A) = \max\{|{}^tA_iA_j| : i \neq j\}}$$

Proposition : (condition de cohérence mutuelle)

Soit $A = (A_1 | \dots | A_p)_{n \times p}$ une matrice telle que $\|A_1\|_2 = \dots = \|A_p\|_2 = 1$, $b \in \mathrm{Im}(A)$ et x^* une solution de $Ax = b$.

i) Si $\|x^*\|_0 \leq \dfrac{\left(1 + \frac{1}{\mu(a)}\right)}{2}$ alors $x^* \in S_{A,parc}(b)$
$x^* \in S_{A,pb}(b)$

ii) Si $\|x^*\|_0 < \dfrac{\left(1 + \frac{1}{\mu(a)}\right)}{2}$ alors $S_{A,parc}(b) = \{x^*\}$
$S_{A,pb}(b) = \{x^*\}$

↳ **Preuve :**

ii) Montrons que pour tout $h \in \mathrm{Ker}(A) \setminus \{0\}$ on a,

$$\sum_{i \in supp(x^*)} |h_i| \leq \frac{1}{2} \|h\|_1 .$$

Cette inégalité implique, d'après la propriété du noyau, que $S_{A,pb}(b) = \{x^*\}$.

Rappel : $\displaystyle\sum_{i \in s(x^*)} |h_i| < \sum_{i \notin s(x^*)} |h_i|$ (prop du noyau)

$$\Leftrightarrow 2 \sum_{i \in supp(x^*)} |h_i| < \sum_{i \notin supp(x^*)} |h_i| + \sum_{i \in supp(x^*)} |h_i| = \|h\|_1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i \in supp(x^*)} |h_i| < \frac{1}{2} \|h\|_1 .$$

Soit $h \in \mathrm{Ker}(A) \setminus \{0\}$ alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} h_i A_i = 0$ ainsi,

$$\forall k \in \{1, \dots, p\} \quad h_k A_k = - \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq k}} h_i A_i$$

D'où,

$${}^tA_k \quad \times {}^tA_k$$

$$1 \leq k \leq p, \quad \left| h_k {}^tA_k A_k \right| = \left| - \sum_{1 \leq i \leq p,\, i \neq k} h_i {}^tA_k A_i \right|$$

$$|{}^tA_k A_k| = 1 \qquad M(A) = \min_{i \neq k} ({}^tA_k A_i)$$

$$1 \leq k \leq p, \quad |h_k| \leq M(A) \sum_{1 \leq i \leq p,\, i \neq k} |h_i|$$

$$|h_k| + M(A)|h_k| \leq M(A) \left(\sum_{i \neq k} |h_i| + |h_k| \right)$$

$$1 \leq k \leq p, \quad (1 + M(A))\, |h_k| \leq M(A) \, \|h\|_1 .$$

$$\sum_{\substack{i \neq k \\ i \in \mathrm{supp}(x^*)}} |h_i| + |h_k| \leq \sum_{i \neq k\, i \in \mathrm{supp}(x^*)} |h_i| \quad \frac{M(A)}{(1+M(A))} \|h\|_1 .$$

Ainsi, $$\sum_{i \in \mathrm{supp}(x^*)} |h_i| \leq \|x^*\|_0 \times \frac{M(A)}{(1+M(A))} \|h\|_1$$

$$< \frac{1}{2} \|h\|_1$$

$$\frac{M(A)}{1+M(A)} < \frac{1}{2} \quad \text{car } M(A) > 1.$$

Donc, $\boxed{S_{A,pb}(b) = \{x^*\}}$.

(solution plus parcimonieuse que x^*.)

Supposons qu'il existe $\tilde{x}$ solution de $Ax = b$ telle que $\|\tilde{x}\|_0 < \|x^*\|_0$ alors la première partie de la preuve montre que $S_{A,pb}(b) = \{\tilde{x}\}$, donc $\tilde{x} = x^*$ et $S_{A,pb}(b) = S_{A,parc}(b) = \{x^*\}$. □